Operazioni tra Insiemi

Insieme: collezione di oggetti non ordinate e senza ripetizioni.

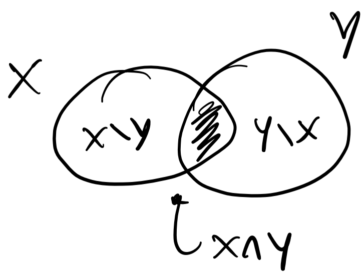
Esempio

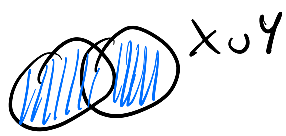
$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,1,4\} \Rightarrow A=B$

$A=\{1,1,2,3\} = \{1,2,3\}$

Notazione $x\in A$ significa che x è un elemento di A

$1\in\{1,2,3\}$





$X\cap Y\subseteq X$

$X\cap Y\subseteq Y$

Operazioni

$X\cup Y$ (unione), $X\cap Y$ (intersezione), $X\subseteq Y$ (contenuto), $X\setminus Y$ (differenza), $X\times Y$

Esempi

$X=\{1,2\}$ $Y=\{1,3,4\}$ $X\cup Y=\{1,2,3,4\}$

$X\cap Y=\{1\}$ $X\not\subseteq Y$ $X\subseteq\{1,2,3\}$

Coppie ordinate

$X\setminus Y=\{2\}$ $Y\setminus X=\{3,4\}$ $X\times Y=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\}$

INSIEMI NOTI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ NATURALI

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NATURALI + 0

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ INTERI

$\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \}$ RAZIONALI

$\mathbb{R}$ REALI

$\mathbb{C}$ COMPLESSI

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

ESERCIZIO

Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 49\}$. Si verifichi quali dei seguenti insiemi contengono A e coincidono con A.

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ $\quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 7\}$ $\quad D = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B \subseteq C = \{\dots, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \neq D \qquad A \not\subseteq D \qquad D \subseteq A$

Esercizio

$A = \{e \in \mathbb{Z} \mid (e+1)^2 = 25\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < 5\}$ $\quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \sqrt{2}\}$

$A \cap C$, $A \cup B$, $A \cap (B \setminus C)$, $C \setminus B$, $(A \cap B) \setminus C$.

$A \cap C = \emptyset$, $A \cup B = \{-6, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \cap (B \setminus C) = A \cap \{2, 3, 4\} = \{4\}$

$C \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \lor 1 < x \leq \sqrt{2}\}$ $\quad (A \cap D) \setminus C = \{4\} \setminus C = \{4\}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dimostrare una proposizione P_n per induzione significa verificare le ipotesi del P. di Induzione

1) esiste $s \in \mathbb{N}$ tale che P_s sia vera;

2) se P_t è vera $(t \geq s)$ allora è vera anche P_{t+1}.

ESERCIZIO

$\boxed{s=1, \quad t=n-1}$

1) $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$n=1 \qquad 1 = \dfrac{1(2)}{2} = 1$ VERA !

Supponiamo che sia vera per $n-1$ dimostriamo valga per n.

$$1+2+\dots+n-1+n = \frac{(n-1)n}{2} + n = n\left[1+\frac{n-1}{2}\right] = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$n=1 \qquad 1^3 = \left(\dfrac{1(2)}{2}\right)^2 = 1$

Supponiamo valga per $n-1$ allora

$$1^3+2^3+\dots+(n-1)^3+n^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2+n^3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4}+n^3$$

$$= n^2\left[\frac{4n+n^2-\cancel{2}n+1}{4}\right] = \frac{n^2(n+1)^2}{n} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad = n^2\left[n+\frac{(n-1)^2}{4}\right]$$

Prodotto cartesiano tra insiemi

Siano X e Y due insiemi $\quad X \times Y = \{(x,y) \mid x\in X \wedge y \in Y\}$

Esempio $\quad X=\{1,2,3\} \quad Y=\{4,5\} \quad X\times Y = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

$|X| = 3 \quad |Y| = 2 \qquad |X\times Y| = |X|\cdot|Y| = 6$

Esercizio Indicato con P insiemi numeri pari positivi (zero escluso) si scrivano elementi della corrispondenza $C=\{(x,y)\in P\times\mathbb{N} \mid x+y<6\}$ e della sua opposta.

$C=\{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1)\}$

$C^\circ=\{(1,2),(2,2),(3,2),(1,4)\} \subseteq \mathbb{N}\times P$

Oss. Corrispondenza $C\subseteq X\times Y$ è ovunque definita se $\forall x\in X$ $\exists y \in Y : (x,y)\in C$. Viene detta funzionale se $\forall x\in X$ $\exists_{\le 1}$ $y\in Y$ (al più) $: (x,y)\in C$.

C è detta funzione se è ovunque definita e funzionale cioè $\forall x\in X$ $\exists!$ (unico) $y\in Y : (x,y)\in C$.

$f: X\to Y \qquad X$ dominio $\quad Y$ codominio $\qquad Im(f)=\{y\in Y : \exists x\in X \; f(x)=y\}$

$f(x)=y \qquad\qquad Im(f)\subseteq Y$

Esercizio Si verifichi se le seguenti corrispondenze sono funzioni:

1) $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z} \mid y=\frac{2}{3}x+1\}$

2) $C_2=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \mid |y|=2x\}$

1) OVUNQUE DEFINITA? $x=\sqrt{2}$ $y=\frac{2}{3}\sqrt{2}+1 \notin \mathbb{Z}$

2) OVUNQUE DEFINITA? SÌ, FUNZIONALE? $x=1$ $|y|=2$

$(1,2)\in C_2$
$(1,-2)\in C_2$ **NO!** $y=\pm 2$

FUNZIONE SURIETTIVA: $\forall y\in Y, \exists x\in X \; f(x)=y$

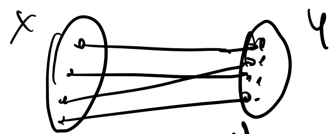
ALMENO UN

FUNZIONE INIETTIVA: $\forall y\in Y, \exists_{\leq 1} x\in X \; f(x)=y$

AL PIÙ UNO

o $\forall x_1,x_2\in X: f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

SURIETTIVA + INIETTIVA $\Leftrightarrow$ BIETTIVA: $\forall y\in Y \; \exists!\, x\in X$



$|X|=|Y|$ se esiste una funzione biettiva $X\to Y$

Si dice $|A|$ CARDINALITÀ DI A IL NUMERO DEI SUOI ELEMENTI

$\exists f: A\to B$ biettiva $\Rightarrow |A|=|B|$

$|A|<\infty$ biezione fra A e $S_m=\{1,2,\dots,m\}\subseteq\mathbb{N}$ $|\{1,7,7,5\}|=4$

$\exists f: A\to B$ suriettiva $\Rightarrow |A|\geq|B|$
iniettiva $\Rightarrow |A|\leq|B|$

$$\underbrace{|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}_0|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|}_{\text{INSIEMI NUMERABILI}} < \underbrace{|\mathbb{R}|=|\mathbb{C}|}_{\text{INSIEMI NON NUMERABILI}}$$

ESERCIZIO

1) $f_1: \mathbb{R}\to\mathbb{N}$ $f(x)=2x+2$ SURIETTIVA, INIETTIVA, BIETTIVA?

$\forall x_1,x_2$ $f(x_1)=f(x_2)$ $2x_1+2=2x_2+2 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2}$ INIETTIVA

$3\in\mathbb{N}$ $\exists x: f(x)=3$? **NO!** **NO SURIETTIVA!**

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$$f: X \to Y \qquad g: Y \to Z$$

$$g \circ f: X \to Z$$

$$x \longmapsto g(f(x))$$

CODOMINIO DI f COINCIDE CON DOMINIO DI g

ESERCIZIO

Si compongano se possibile le seguenti funzioni.

1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}_0$ $\qquad$ $g: \mathbb{P}_0 \to \mathbb{P}$

$x \to 2x-2$ $\qquad$ $x \to x+2$

$$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$$

$$x \longrightarrow g(f(x)) = g(2x-2) = 2x$$

BIETTIVA

si determini se sono biettive e si trovi f^{-1} e g^{-1} e si verifichi che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$(g \circ f)^{\circ} = \overset{\text{opposta}}{(g \circ f)^{-1}}$ che ha come dominio il codominio di $g \circ f$ e come codominio il dominio di $g \circ f$.

$y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$ $\qquad$ $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{P} \to \mathbb{N}$

$$y \to y/2$$

$f^{-1}: \mathbb{P}_0 \to \mathbb{N}$, $\to \frac{y+2}{2}$ $\qquad$ $g^{-1}: \mathbb{P} \to \mathbb{P}_0$, $y \to y-2$ $\qquad$ $f^{-1} g^{-1}(y) = \frac{y}{2}$

2

ESERCIZIO

La funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = x^3 + 2$ è invertibile?

È invertibile $\Leftrightarrow$ è biettiva.
iniettiva + suriettiva

$\forall x_1, x_2$
$f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

SURIETTIVA?

in $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sì

$x^3 + 2 = 1 \Rightarrow x^3 = -1$ nessuna soluzione in $\mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{N}$ $f(x) \neq 1$

$\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ 1 soluzione
$\mathbb{C}$ 3 soluzioni

OSS. Un insieme X ha cardinalità ∞ ($|X| = \infty$) se $\exists Y$ con $Y \subseteq X$ e $Y \neq X$ tale che $\exists f: X \to Y$ biettiva.

ESERCIZIO

Dimostrare che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ovvero che $\mathbb{Z}$ è **NUMERABILE**

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono insiemi infiniti (infinito numero di elementi).

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \text{ positivo} \\ -2x+1 & x \text{ negativo} \end{cases}$

$\ldots -2 \ -1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 2 \ldots \mathbb{Z}$
$\ldots 5 \ \ 3 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 4 \ldots \mathbb{N}$
dispari $\leftarrow$ $\quad$ $\rightarrow$ pari

$\forall x_1, x_2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ INIETTIVA!

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x$; $f(x) = n$?

n pari $x = \frac{n}{2}$
n dispari $x = -\frac{(n-1)}{2}$