$\lambda_3 = 3$

$$(A-3I)v = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x = 0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases}$$

$$V_3 = \{ (0,y,y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((0,1,1))$$

$$B_{V_3} = ((0,1,1)) \qquad m_g(3) = 1$$

Def. A e B si dicono SIMILI se esiste una matrice P invertibile tale che

$$A = PBP^{-1}$$

Dimostrare che 2 matrici simili A e B hanno $\det(A) = \det(B)$, $rk(A) = rk(B)$, e stesso pol. caratteristico

Def. A è DIAGONALIZZABILE se è SIMILE ad una matrice diagonale.

$\Downarrow$

$\exists P$ con $\det(P) \neq 0$ tale che $D = P^{-1}AP$

cioè $PD = AP$, dove P è detta

MATRICE DIAGONALIZZANTE

TEOREMA

$A \in M_n(\mathbb{R})$ è DIAGONALIZZABILE $\iff$ Esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A $\iff$ tutti gli autovalori sono regolari cioè $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni λ.

EX. (Esempio precedente)

$$D = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_{V_{-3}} & B_1 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ESERCIZIO

Stabilire se la matrice è DIAGONALIZZABILE.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(5-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-5)\left((2-\lambda)^2 - 9\right) = \lambda(\lambda-5)(2-\lambda-3)(2-\lambda+3)$$

$$= \lambda(\lambda-5)(5-\lambda)(-\lambda-1) = \lambda(\lambda-5)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad m_a(1) = 1 = m_g(1)$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 5 \qquad m_a(5) = 2 \Rightarrow m_g(2) = ?$

$\lambda_4 = -1 \qquad m_a(-1) = m_g(-1)$

A È DIAGONALIZZABILE $\iff \boxed{m_a(5) = m_g(5) = 2}$

Per stabilirlo devo calcolare la dimensione di V_5 poiché

$$\begin{aligned} m_g(5) &= \dim V_5 \\ &= \dim \{ v \mid (A-5I)v = 0 \} \\ &= n - rk(A-5I) \end{aligned}$$

$$rk(A-5I) = rk\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + rk\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + rk\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 2 = 3$$

$$m_g(5) = n - rk(A-5I) = 4 - 3 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$m_a(5) = 2 \neq 1 = m_g(5)$$

$$\Downarrow$$

A NON È DIAGONALIZZABILE $\qquad \nexists\, P, D$ tali che $D = P^{-1}AP$ con D diagonale

$v = (x, y, z, t)$

$$(A-5I)v = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -5x = 0 \\ x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ 3y - 3z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ y = z \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}$$

$$V_5 = \{(0, z, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,1,1,0))$$

ESERCIZIO

Determinare autovalori e autospazi di A e, se esistono, D e P tali che $D = P^{-1}AP$ e D diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2 \left((2-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (3-\lambda)^2 (2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$$

$$= (3-\lambda)^2 (3-\lambda)(1-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)^3 (1-\lambda)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$m_a(3) = 3 \Rightarrow m_g(3) = ?$

$\lambda_4 = 1$

$m_a(1) = 1 \Rightarrow m_g(1) = 1$

A è DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ $\boxed{m_a(3) = m_g(3) = 3}$

$$m_g(3) = 4 - rk\left(A - 3I\right) = 4 - 1 = 3$$

$$rk(A-3I) = rk\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

Tutti gli autovalori sono REGOLARI $\Rightarrow$ A DIAG.

Matrice Δ è formata dagli autovalori con dovuta molteplicità scegliendo un certo ordine.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo le BASI per gli AUTOSPAZI.

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ -y+z=0 \right. \Rightarrow \left\{ z=y \right.$$

$$V_3 = \{(x,y,z,t) \mid z=y\} = \{(x,y,y,t) \mid x,y,t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}\left((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\right)$$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ y+z=0 \\ 2t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ t=0 \end{cases} \qquad V_1 = \{ (0,y,-y,0) \mid z \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((0,1,-1,0))$$

$$B_{V3} = ((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)) \qquad B_{V1} = ((0,1,-1,0))$$

$$D = \begin{array}{c} \overbrace{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}\quad \lambda_4 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} B_{V3} \qquad B_{V1} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Verificare che $\underline{PD = AP}$ $\quad (D = P^{-1}AP)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+1 & 0 & 2-1 \\ 0 & 1+2 & 0 & 1-2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

1) Si scriva una matrice diagonalizzabile ma non DIAGONALE con autovalori 1 e 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow m_a(1) = m_g(1) = 1$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow m_a(3) = m_g(3) = 1$

OSS.

Se A è DIAGONALE $\Rightarrow$ A è DIAGONALIZZABILE

con $D = A$ e $P = I$

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = I^{-1}AI = IAI = A$$

2) Si scriva matrice diagonalizzabile ma non diagonale che abbia autovalori 0, 2, 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I)$

$= -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)$

ESERCIZIO

Si determini per quali valori di k il vettore $v=(2,-3)$ è AUTOVETTORE di $A=\begin{pmatrix} k & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Se esistono tali valori dire l'autovalore corrispondente.

v è AUTOVETTORE RELATIVO A λ DI A

$$\Updownarrow$$

$$Av=\lambda v$$

$$\begin{pmatrix} k & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2 eq. in 2 incognite (k,λ)

$$\begin{cases} 2k+6=2\lambda \\ -6=-3\lambda \Rightarrow \lambda=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2k+6=4 \\ \lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ \lambda=2 \end{cases}$$

Per $k=-1$ v è AUTOVETTORE RELATIVO ALL'AUTOVALORE 2.

ESERCIZIO

Si determinino, se esistono, i valori di $k\in\mathbb{R}$ tale che la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 3k & 4 \\ k+1 & k+3 & 2k \end{pmatrix}$$

abbia come autovalore 0 con molteplicità geometrica 2.

$\lambda=0$ è AUTOVALORE $\iff \det(A-\lambda I)=0$

$$\Updownarrow$$

$$\det(A)=0$$

$$m_g(0)=\dim V_0 = n - rk(A-\lambda I)$$
$$= 3 - rk(A) = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{rk(A)=1} \Rightarrow \det(A)=0$$

$$rk(A) = rk\begin{pmatrix}1&3&k\\k&3k&1\\k+1&k+3&2k\end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix}1&3&k\\0&0&1-k^2\\k+1&k+3&2k\end{pmatrix}\ C_2-kC_1$$

$k\neq\pm1$

$$= 1 + rk\begin{pmatrix}1&3\\k+1&k+3\end{pmatrix} = \begin{cases}3 & k\neq0\\2 & k=0\end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&3\\k+1&k+3\end{pmatrix} = k+3-3(k+1)$$
$$= k+\cancel{3}-3k-\cancel{3} = -2k$$

$k=1$

$$rk(A) = rk\begin{pmatrix}1&3&1\\0&0&0\\2&4&4\end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&4\end{pmatrix} = 2$$

$k=-1$

$$rk(A) = rk\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&-2\end{pmatrix} = 2$$

$$rk(A) = \begin{cases}3 & k\neq0,1,-1\\2 & k=0,1,-1\end{cases} \Longrightarrow \nexists\, k\in\mathbb{R} : m_g(0)=2$$

ESERCIZIO

Si scriva una matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ che abbia come autovettori $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} A v = \lambda v \\ \| \quad\; \| \\ I v = 1 \cdot v \end{matrix}$$

AUTOVETTORI RELATIVI ALL'AUTOVALORE 1.

ESERCIZIO

Si determini per quali valori di k $v = (2,-1)$ è autovettore di $A = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se esistono tali valori quale è l'autovalore corrispondente e la dimensione del relativo <u>AUTOSPAZIO</u>.

$$A v = \lambda v$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2 + 2k = 2\lambda \\ -1 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2} + 2k = \cancel{2} \Rightarrow k = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$\boxed{k=0}$ v È AUTOVETTORE CON AUTOVALORE $\boxed{1}$.

$$\dim V_1 = mg(1) = n - rk(A - \lambda I) = 2 - rk(A - I)$$
$$= 2 - 0 = 2$$

$\uparrow$ DIMENSIONE AUTOSPAZIO $\lambda = 1$

$\underline{n=0}$

$$rk(A-I) = rk\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ESERCIZIO

Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ $v=(k,k,1)$ è AUTOVETTORE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

per tali valori si trovi l'autovalore corrispondente e la sua molteplicità geometrica.

$$Av = \lambda v$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2k-2k = \lambda k \\ -k+1 = \lambda k \\ k-1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda k = 0 \\ k=1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ \lambda=0 \end{cases}$$

$$mg(0) = 3 - rk(A) = 3 - rk\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - rk\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
C_1+C_3

$$= 3 - \left(1 + rk\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3-2 = 1$$

ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2k & \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quando v è AUTOVETTORE DI A?

$$Av = \lambda v$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2k & \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 - 2k = \lambda \\ -k^2 = -\lambda k \\ 1 - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2 = 1 \;\; \checkmark \\ -1 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

FORMA DI JORDAN

1) A è DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore λ

$\Leftrightarrow$ $\exists\, P, D$ (diagonale): $D = P^{-1} A P$

$\Leftrightarrow$ $n = \sum m_a(\lambda) = \sum m_g(\lambda)$

$\Leftrightarrow$ A ha n autovettori linearmente indipendenti.

$\Leftrightarrow$ $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k} = \mathbb{K}^n$

Ogni matrice (anche non diagonalizzabile) A COEFF. IN UN CAMPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO è SIMILE ad una matrice nella forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix} \quad \text{(MATRICE A BLOCCHI)}$$

dove $J_1, J_2, \dots, J_p$ sono matrici nella forma:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Quindi $\exists P : \quad P^{-1} A P = J$ dove gli elementi non nulli sono nella diagonale principale e nella seconda diagonale principale.

$\Rightarrow$ Dato un autovalore λ_i di A, la sua molteplicità geometrica $m_g(\lambda_i)$ è IL NUMERO DI BLOCCHI DI JORDAN che corrispondono a λ_i.

$\Rightarrow$ Dato un autovalore λ_i di A, la sua molteplicità algebrica è LA SOMMA DELLE DIMENSIONI DEI BLOCCHI DI JORDAN corrispondenti a λ_i.

$\Downarrow$

A è DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

$\Updownarrow$

I BLOCCHI J_i SONO 1×1

ESERCIZIO

Si scriva una matrice con AUTOVALORI 1 e 2 di MOLTEPLICITÀ GEOM. 2 e 1 RISPETTIVAMENTE NON DIAGON.

Per Jordan tale matrice può essere scritta come matrice a blocchi con almeno 1 blocco maggiore di $\boxed{1 \times 1}$.

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}}_{J_1} & & \\ & \underbrace{1}_{J_2} & \\ & & \underbrace{2}_{J_3} \end{pmatrix}$$

MOLTEPLICITÀ GEOM. # DI BLOCCHI

$mg(1) = 2$

2 blocchi

con $\lambda = 1$

$mg(1) = 2 \neq 3 = ma(1)$ NON DIAGONALIZZABILE

$mg(2) = 1 = ma(2)$

ESERCIZIO

Sia F_n il numero n-esimo di Fibonacci, dove $F_0 = 1$ $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per gli $n \geq 2$.

Si consideri il seguente prodotto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{F_n + F_{n-1}}^{F_{n+1}} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

dove applicando 2 volte lo stesso ragionamento ho:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_{n-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}$$

applicandolo $n-1$ volte arrivo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}_{n-1 \text{ volte}}\underbrace{\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}$$

COME CALCOLO TALE MATRICE 2×2

$\Downarrow$ DIAGONALIZZAZIONE

Se $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile allora $\exists$ D (diagonale) e P tale che

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=PDP^{-1}$$

$P^{-1}P=I$

ma allora $$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-1}=\underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n-1 \text{ volte}}$$

$$=P\underbrace{DI}_{D}\underbrace{DI}_{D}\cdots\underbrace{I}D\,P^{-1}$$

$$=PD^{n-1}P^{-1}$$

Essendo D diagonale calcolare D^{n-1} è facile. $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

$D^{n-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}&0\\0&\lambda_2^{n-1}\end{pmatrix}$ dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A

DIAGONALIZZO A

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)-1 = 0$$

$$-\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-1=0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \text{SEZIONE AUREA} \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \varphi$$

$$\lambda_2 = 1-\varphi \qquad D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{pmatrix}$$

$$(1-\varphi)\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$$

CALCOLO LA MATRICE DIAGONALIZZANTE P. MI SERVONO GLI AUTOSPAZI

$$V_{\lambda_1} = V_\varphi = \left\{ (x,y) \mid (A-\varphi I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\varphi & 1 \\ \boxed{1} & -\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \{\, x-\varphi y = 0$$

$$x = \varphi y$$

$$\det(\cdot) = \underbrace{-\varphi(1-\varphi)}_{1} - 1 = 0$$

$$V_\varphi = \{ (\varphi y, y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((\varphi,1))$$

$$V_{1-\varphi} = \{ ((1-\varphi)y, y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1-\varphi,1))$$

$$P = \begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -(1-\varphi) \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varphi-(1-\varphi)} \begin{pmatrix} 1 & -(1-\varphi) \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\varphi-1} \begin{pmatrix} 1 & -(1-\varphi) \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = P\, D^{n-1} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\varphi-1} \begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{n-1} & 0 \\ 0 & (1-\varphi)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(1-\varphi) \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi^{n-1} & 0 \\ 0 & (1-\varphi)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{1-(1-\varphi)}^{\varphi} \\ \varphi-1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n \\ -(1-\varphi)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} \\ \varphi^n - (1-\varphi)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\varphi-1} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} \\ \varphi^n - (1-\varphi)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} \\ \varphi^n - (1-\varphi)^n \end{pmatrix}$$

$$2\varphi - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = 1+\sqrt{5}-1 = \sqrt{5}$$

$$\boxed{F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}}$$

FORMULA DI BINET

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

MATRICI ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILI

Def. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE se è diagonalizzabile e la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale $\Rightarrow$ P è tale che $P^{-1} = P^t$

$$\boxed{A = PDP^{-1} = PDP^t}$$

N.B.

Una matrice di $M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\Leftrightarrow$ le sue righe (colonne) formano basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

TEOREMA Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) A è ortogonalmente diagonalizzabile
2) $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di A
3) A è simmetrica $(A = A^t)$

ESEMPIO

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+6 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & k-1 \\ k+1 & 2 & k+7 \end{pmatrix}$$

è ortogonalmente diagonalizzabile?

$A = A^t$?

$$\begin{cases} k+1 = 3 \\ k-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

$\nexists\, k \in \mathbb{R}$

Esercizio

Si determini, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2-2h & 1 \\ 2h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2h \end{pmatrix}$$

e una matrice diagonalizzante P ortogonale.

A è ort. diag. $\Longleftrightarrow A = A^t$

$$2h = -2-2h \Rightarrow 4h = -2 \Rightarrow \boxed{h = -\frac{1}{2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left((2-\lambda)(1-\lambda) - 2\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\cancel{2} - 3\lambda + \lambda^2 - \cancel{2}\right) = \underbrace{\lambda(\lambda-3)(1-\lambda)}_{=0}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$

$m_a(0) = m_g(0) = 1$ $\qquad$ $m_a(3) = m_g(3) = 1$

$m_a(1) = m_g(1) = 1$

$$V_0 = \{ v = (v_1, v_2, v_3) \mid Av = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ v_1 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = -v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = v_1 \\ v_3 = -v_1 \end{cases} \qquad V_0 = \{ (v_1, v_1, -v_1) \mid v_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathcal{L}((1, 1, -1))$$

$$V_3 = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 \\ v_3 = -v_2 \end{cases}$$

$$V_3 = \{ (-2v_2, v_2, -v_2) \mid v_2 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((-2, 1, -1))$$

$$V_1 = \left\{ v=(v_1,v_2,v_3) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + \cancel{v_3} = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \end{cases}$$

$$V_1 = \{ (v_1, v_1, 0) \mid v_1 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,1,0))$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = (\underset{e_1}{(1,1,-1)}, \underset{e_2}{(-2,1,-1)}, \underset{e_3}{(1,1,0)})$$

$\downarrow$ ORTOGONALIZZARE

$$B' \xrightarrow[\text{NORMALIZZARE}]{} B''$$

$$e_1' = e_1 = (1,1,-1)$$

$$e_2' = e_2 - \cancelto{=0}{\frac{e_2 \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'}} e_1' = e_2 = (-2,1,-1)$$

$$e_3' = e_3 - \frac{e_3 \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'} e_1' - \frac{e_3 \cdot e_2'}{e_2' \cdot e_2'} e_2'$$

$$e_2' \cdot e_2' = 6$$

$$e_1 \cdot e_1 = 3 \qquad e_3 \cdot e_1' = 1+1 = 2 \qquad e_3 \cdot e_2' = -1$$

$$e_3' = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,-1) - \overbrace{\frac{(-1)}{6}}^{+1/6}(-2,1,-1)$$

$$= (1,1,0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to (0,1,1)$$

$$B' = \left((1,1,-1), (-2,1,-1), (0,1,1)\right)$$

$\downarrow$ NORMALIZZO

$$B'' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{PP^t = P^tP = I}$$

ESERCIZIO

Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio $V = \mathcal{L}((2,k,2),(0,-1,k-3)) \leq \mathbb{R}^3$ contiene almeno un autovettore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$\Downarrow$

$\exists v \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$: $v \in V$ e $Av = \lambda v$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 + (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1) \to \boxed{\lambda_1 = 1}, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

$\lambda = 1$

Calcolo

$V_1 = \{(x,y,z) \mid (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$\begin{cases} -y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\qquad V_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,0))$

$\dim(V \cap V_1) \geq 1$ $\qquad \dim(V) = 2$, $\dim(V_1) = 1$

$\dim(V \cap V_1) = \underset{2}{\dim(V)} + \underset{1}{\dim(V_1)} - \dim(V + V_1)$

$= 3 - \dim(V+V_1) \geq 1 \Rightarrow \dim(V+V_1) = 2$

$$\text{rk}\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ k & -1 & 0 \\ 2 & k-3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rk}\begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & k-3 \end{pmatrix} = 2$$

$\Downarrow$

$$\det\begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & k-3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{k = 1, 2}$