MATRICI ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILI

Def. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE se è diagonalizzabile e la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale $\Rightarrow$ P è tale che $P^{-1} = P^t$

$$\boxed{A = PDP^{-1} = PDP^t}$$

N.B.

Una matrice di $M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\Leftrightarrow$ le sue righe (colonne) formano basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

TEOREMA Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) A è ortogonalmente diagonalizzabile
2) $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di A
3) A è simmetrica $(A = A^t)$

ESEMPIO

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+6 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & k-1 \\ k+1 & 2 & k+7 \end{pmatrix}$$

è ortogonalmente diagonalizzabile?

$A = A^t$?

$$\begin{cases} k+1 = 3 \\ k-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

$\nexists\, k \in \mathbb{R}$

Esercizio

Si determini, se possibile, una matrice diagonale D simile ad A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2-2k & 1 \\ 2k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2k \end{pmatrix}$$

e una matrice diagonalizzante P ortogonale.

A è ort. diag. $\iff A = A^t$

$$2k = -2-2k \Rightarrow 4k = -2 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{1}{2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(1-\lambda) - 2\big)$$

$$= (1-\lambda)\,(\cancel{2} - 3\lambda + \lambda^2 - \cancel{2}) = \underbrace{\lambda(\lambda-3)(1-\lambda)}_{=0}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$

$m_a(0) = m_g(0) = 1$ $m_a(3) = m_g(3) = 1$

$m_a(1) = m_g(1) = 1$

$$V_0 = \{ v = (v_1, v_2, v_3) \mid Av = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ v_1 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = -v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = v_1 \\ v_3 = -v_1 \end{cases} \qquad V_0 = \{ (v_1, v_1, -v_1) \mid v_1 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,1,-1))$$

$$V_3 = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 \\ v_3 = -v_2 \end{cases}$$

$$V_3 = \{ (-2v_2, v_2, -v_2) \mid v_2 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((-2,1,-1))$$

$$V_1 = \left\{ v=(v_1,v_2,v_3) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + \cancel{v_3} = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ v_1 = v_2$$

$$V_1 = \{ (v_1, v_1, 0) \mid v_1 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,1,0))$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = (\overset{e_1}{(1,1,-1)}, \overset{e_2}{(-2,1,-1)}, \overset{e_3}{(1,1,0)})$$

$\downarrow$ ORTOGONALIZZARE

$$B' \xrightarrow[\text{NORMALIZZARE}]{} B''$$

$$e_1' = e_1 = (1,1,-1)$$

$$e_2' = e_2 - \frac{\cancelto{0}{e_2 \cdot e_1'}}{e_1' \cdot e_1'} e_1' = e_2 = (-2,1,-1)$$

$$e_3' = e_3 - \frac{e_3 \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'} e_1' - \frac{e_3 \cdot e_2'}{e_2' \cdot e_2'} e_2' \qquad e_2' \cdot e_2' = 6$$

$$e_1 \cdot e_1 = 3 \qquad e_3 \cdot e_1' = 1 + 1 = 2 \qquad e_3 \cdot e_2' = -1$$

$$e_3' = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,-1) - \overbrace{\frac{(-1)}{6}}^{+1/6}(-2,1,-1)$$

$$= (1,1,0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow (0,1,1)$$

$$B' = \big((1,1,-1), (-2,1,-1), (0,1,1)\big)$$

$\downarrow$ NORMALIZZO

$$B'' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$PP^t = P^tP = I$$

ESERCIZIO

Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio $V = \mathcal{L}((2,k,2),(0,-1,k-3)) \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene almeno un autovettore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$\Downarrow$

$\exists v \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$: $v \in V$ e $Av = \lambda v$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 + (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1) \rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

$\lambda = 1$

Calcolo

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} -y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad V_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,0))$$

$$\dim(V \cap V_1) \geq 1 \qquad \dim(V) = 2 \qquad \dim(V_1) = 1$$

$$\dim(V \cap V_1) = \overset{2}{\overset{\|}{\dim(V)}} + \overset{1}{\overset{\|}{\dim(V_1)}} - \dim(V+V_1)$$

$$= 3 - \dim(V+V_1) \geq 1 \Rightarrow \dim(V+V_1) = 2$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ k & -1 & \cancel{0} \\ 2 & k-3 & \cancel{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$1 + \operatorname{rk}\begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & k-3 \end{pmatrix} = 2$$

$\Downarrow$

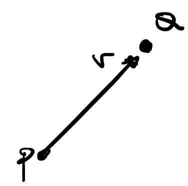
$$\det\begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & k-3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 1, 2}$$

Spazi Affini

Def. Si dice **spazio affine** di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, la struttura $A_n(\mathbb{K})$ costituita da:

- Un insieme $A \neq \emptyset$, detto **sostegno**
  ↳ insieme dei PUNTI
- Uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$
- un'applicazione
$$f: A \times A \to V_n(\mathbb{K})$$
$$(P,Q) \longrightarrow v = \overrightarrow{PQ}$$

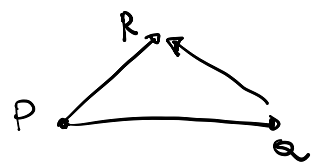


$$Q = P \oplus v$$ ATTENZIONE!

PROPRIETÀ:

1) $\forall P \in A$, $\forall v \in V_n(\mathbb{K})$ $\exists!\, Q \in A$ tale che $v = \overrightarrow{PQ}$ (Q = traslato di P mediante v).

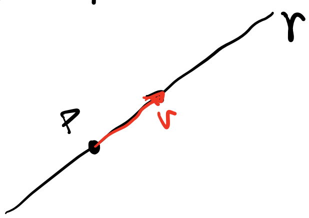
2) $\forall P, Q, R \in A$ $\quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



Def. Fissato $v \in V_n(\mathbb{K})$ si dice **TRASLAZIONE** individuata da v l'applicazione
$$T_v : A \longrightarrow A$$
$$P \longrightarrow Q \quad \text{tale che } v = \overrightarrow{PQ}$$

Def. Una **RETTA** $r = [P; V_1]$ è l'insieme di tutti i traslati di un punto P mediante i vettori di V_1 che è un sotto vettoriale di $V_n(K)$ di dimensione 1. (∞^1 punti)

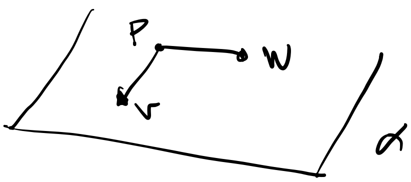
$V_1 = \mathcal{L}(v)$



V_1 è detto SPAZIO DI TRASLAZIONE

Un **PIANO** $\alpha = [P; V_2]$, l'insieme dei traslati di un punto P tramite i vettori di un sott. vettoriale V_2 di dimensione 2.

$V_2 = \mathcal{L}(v, w)$



∞^2 punti

V_2

⋮

Un **IPERPIANO** $S_{n-1} = [P; V_{n-1}]$ dove V_{n-1} spazio di traslazione di dim $n-1$.