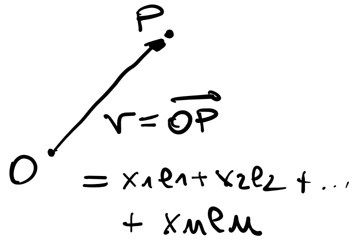
GEOMETRIA AFFINE

Def. Si dice RIFERIMENTO AFFINE di $A_n(\mathbb{R})$ una coppia $[O;B]$ dove

- O è un punto fissato (ORIGINE)
- B è una BASE di $V_n(\mathbb{R})$

$B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$



La funzione $\phi: A \to \mathbb{R}^n$

$$P \to (x_1,x_2,\dots,x_n)$$

associa ad ogni punto P, le componenti di $\overrightarrow{OP}$ rispetto a B.

ϕ = COORDINATIZZAZIONE di $A_n(\mathbb{R})$

Def. I PARAMETRI DIRETTORI di una RETTA $r=[P;V_1]$ sono le componenti rispetto a B di un qualsiasi vettore di V_1.

La GIACITURA di un PIANO $\alpha=[P;V_2]$ sono le componenti rispetto a B di una qualsiasi coppia di vettori linearmente indipendenti di V_2.

PROPRIETÀ

1) $\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow P=Q$

2) $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{PQ}$

traslato　　　　somma vettori

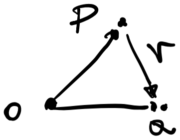
3) $\forall v,w \in V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow (P+v)+w = P+(v+w)$

4) corrispondenza biunivoca tra i punti (A) e i vettori $V_n(\mathbb{K})$

Fissato un riferimento affine di $A_n(\mathbb{R})$ $[O;B]$

$P=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $\quad \vec{OP}=x_1e_1+\dots+x_ne_n$

$Q=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ $\quad \vec{OQ}=y_1e_1+\dots+y_ne_n$



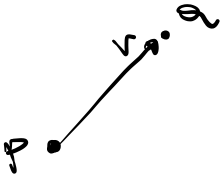
$$\vec{OP}+v=\vec{OQ} \Rightarrow v=\vec{OQ}-\vec{OP}=$$
$$=(y_1-x_1)e_1+\dots+(y_n-e_n)e_n$$

v ha componenti $(y_1-x_1,y_2-x_2,\dots,y_n-x_n)=\boxed{Q-P}$

$\Downarrow$

Se $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$ e $P=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ le coordinate di P tramite v sono $(P+v)$ $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ dove

$$\left\{\begin{array}{lcc} y_1= & \boxed{x_1+} & \boxed{\alpha_1} \\ \vdots & & \\ y_n= & x_n+ & \alpha_n \\ & \downarrow & \downarrow \\ & P & v \end{array}\right.$$



N.B. $A_n(\mathbb{K})$ spazio affine di dimensione n è a patto di isomorfismi

$$(\underbrace{\mathbb{K}^n}_{A=\text{insieme di punti}},\ \underbrace{\mathbb{K}^n}_{V_n(\mathbb{K})=\text{spazio vettoriale}},\ f)$$

$$\boxed{f(P,Q)=Q-P}$$

fissata una base B ↑ componenti

Esempio

In $A_2(\mathbb{R})$ dati $P=(0,3)$, $Q=(1,-2)$ determinare $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1-0)e_1 + (-2-3)e_2 = e_1 - 5e_2$$

$\Rightarrow$ le componenti di $\overrightarrow{PQ}$ rispetto a $B_c=((1,0),(0,1))$ sono $(1,-5)$.

Esercizio

In $A_3(\mathbb{R})$ dati $P=(1,0,-1)$, $Q=(2,1,3)$ determinare $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (2-1)e_1 + (1-0)e_2 + (3-(-1))e_3 = e_1 + e_2 + 4e_3$$
$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = -e_1 - e_2 - 4e_3$$

Esercizio

In $A_3(\mathbb{R})$ dato $P=(0,1,-3)$ e $v = \overset{\overset{1}{\sim}}{e_1} + \overset{\overset{2}{\sim}}{2}e_2 + \overset{\overset{1}{\sim}}{e_3}$

determinare $Q=P+v$ $\qquad Q=(x_Q, y_Q, z_Q)$

$$=(1,3,-2)$$

$$\begin{cases} x_Q = 0+1 = 1 \\ y_Q = 1+2 = 3 \\ z_Q = -3+1 = -2 \end{cases}$$

RETTE IN $A_2(\mathbb{R})$

EQ. PARAMETRICHE

$$r: \begin{cases} x = x_P + \ell \cdot t \\ y = y_P + m \cdot t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$P = (x_P, y_P) \qquad pdr = [(\ell, m)]$

$(\ell, m) \neq (0,0)$

$B = (e_1, e_2)$

$r = [P; V_1 = \mathcal{L}(v)]$

P: (x_P, y_P)

$v = \ell e_1 + m e_2$

$\mathcal{L}(v) = \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$r = P + V_1 = \{(x_P, y_P) + t \cdot (\ell, m) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x_P + t \cdot \ell, y_P + t \cdot m) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

EQ. CARTESIANA

$ax + by + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0) \qquad pdr = [(-b, a)]$

ESEMPIO

In $A_2(\mathbb{R})$ scrivere l'equazione della retta $r = [P; V_1]$ dove $P = (1, -3)$, $V_1 = \mathcal{L}(v)$ con $v = 2e_1 + e_2$.

La retta è l'insieme dei traslati di P per tutti i vettori di V_1.

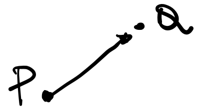
Generico vettore di V_1 è $tv = 2te_1 + te_2$, $t \in \mathbb{R}$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$pdr = [(2,1)] = [(1, 1/2)] = [(-2,-1)]$

ESEMPIO

Determinare un'eq. cartesiana della retta r per $P=(1,1)$ e $Q=(2,-1)$



$r = [P; V_1]$ dove $\vec{PQ} \in V_1$ $\qquad \vec{PQ} = e_1 - 2e_2$

$\downarrow$

componenti $Q-P = (2-1, -1-1)$
$= (1,-2)$

$pdr = [(1,-2)]$

PARAMETRICA

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$ **CARTESIANA**

isolo t da un'equazione

$$r: \begin{cases} \boxed{t} = x - 1 \\ y = 1 - 2\underline{(x-1)} \end{cases}$$

sostituisco il valore di t

$ax+by+c=0$

$$y = 1 - 2x + 2 \Rightarrow \boxed{2x + y - 3 = 0}$$

$pdr[(1,-2)] = [(b,-a)] = [(-b,a)]$ ✓

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \end{cases} \xrightarrow{a \neq 0} \begin{cases} x = -\frac{b}{a} y + \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a} y \end{cases} \quad S = \mathcal{L}\left(\left(-\frac{b}{a}, 1\right)\right)$$

$S = P + V$ → s. sistema lin. omogeneo

↳ sol. particolare

ES: Data la retta $2x-y=2$ determinare una rappresentazione parametrica

Pongo $x=t \rightarrow 2t-y=2 \rightarrow y=2t-2$

$$\Rightarrow \quad r: \begin{cases} x=t \\ y=2t-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad p.d.r=[(1,2)]$$

$$V=\mathcal{L}(v) \quad \boxed{v=e_1+2e_2}$$

spazio di traslazione

$P=(0,-2)$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA SOTTOSPAZI LINEARI

Dati 2 sottospazi lineari $\pi_1=[P;V]$

$\pi_2=[Q;W]$

si dice $\underbrace{\pi_1//\pi_2}_{\pi_1 \text{ parallelo } \pi_2} \Longleftrightarrow \pi_1\subseteq\pi_2$ o $\pi_2\subseteq\pi_1$

N.B. Se $\dim\pi_1=\dim\pi_2 \Longrightarrow \pi_1//\pi_2 \Longleftrightarrow \pi_1=\pi_2$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO NON È TRANSITIVA IN GENERALE, LO È se i sottospazi in questione hanno la stessa dimensione.

$A=[P;V]$

$B=[Q;W]$

$C=[R;U]$

$A//B$ e $B//C \Rightarrow A//C$

se e solo se

$\dim A=\dim B=\dim C$

OSS. Siano A e B due sott. lineari con $A // B$ allora può succedere che $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$ o $A \cap B = \emptyset$.

ES. Determinare eq. cartesiana della retta per $H=(0,-3)$ parallela a $s: \begin{cases} x = 17 + t \\ y = -6 + 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Una retta // a s possiede lo stesso spazio di traslazione ⇒ stessi p.d.

$p.ds = [(1,2)]$

$P = (17,-6)$

$$pdr = [(1,2)] \Rightarrow r: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

CART.

$$\Rightarrow \begin{cases} t = x \\ \boxed{y = -3 + 2x} \end{cases} \longrightarrow r: 2x - y - 3 = 0$$

MUTUA POSIZIONE DI 2 RETTE

$r: ax + by + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0)$

$s: a'x + b'y + c' = 0 \qquad (a',b') \neq (0,0)$

$$AX = B$$

$$r \cap s: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{A} & B \\ a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{array} \right)$$

NUMERO SOLUZIONI DEL SISTEMA

- Se $\rho(A)=2 \Rightarrow \rho(A|B)=2 \Rightarrow$ sist. compatibile $\exists!$ soluzione $\Rightarrow r \cap s = \{P\}$ punto di intersezione
- Se $\rho(A)=\rho(A|B)=1 \Rightarrow \infty^{2-1}=\infty^{1}$ soluzioni $\Rightarrow r=s$ rette coincidenti $\Rightarrow r \parallel s$
- Se $\rho(A)=1$ e $\rho(A|B)=2 \Rightarrow$ sist. incompatibile $\Rightarrow r \cap s = \emptyset \Rightarrow r \parallel s$ ma $r \neq s$ (rette parallele e distinte)

PARALLELISMO

$rk(A)=1 \Rightarrow rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1 \Longleftrightarrow (a,b)$ è PROPORZIONALE a $(a',b') \Longleftrightarrow (-b,a)$ è PROP. a $(-b',a')$

$\Longleftrightarrow [(-b,a)]=[(-b',a')] \Longleftrightarrow \boxed{pdr = pds}$

ESERCIZI MUTUA POSIZIONE

1) $r: 2x+y-7=0$, $s: -4x-2y-5=0$

$pdr=[(-1,2)]$ $\qquad pds=[(2,-4)]$

$rk\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow r \parallel s$ coincidenti o distinte?

$$rk\begin{pmatrix} -1 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 7 \\ -2 & 5 \end{matrix}} \\ -4 & \end{pmatrix}=2$$

$\Downarrow$

$r \parallel s$ DISTINTE

2) $r: x-3y-2=0$

$s: -2x+6y+4=0$

$$\text{rk}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}=1$$

$\text{pdr}=[(3,1)]$

$\text{pds}=[(-6,-2)]$

$$\text{rk}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 2\\ -2 & 6 & -4\end{array}\right)=1$$

$\boxed{r//s \text{ e } r=s}$ $\qquad s=-2r$

3) $r: x+3y=1$

$s: -x+y=3$

$$A|B=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{array}\right)$$

$$\text{rk}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=2=\text{rk}(A|B)$$ ∞^0 sol.

$$\begin{cases}x+3(3+x)=1\\ y=3+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=-8\\ y=3+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$$

$r\cap s=\{P\}$, $P=(-2,1)$

4) $r: x-y=1$

$s: (k-1)x+ky=1$ $\quad k\in\mathbb{R}$

$$A|B=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -1\\ k-1 & k & -1\end{array}\right)$$

$$\text{rk}\begin{pmatrix}1 & -1\\ k-1 & k\end{pmatrix}=\begin{cases}2 & k\neq\frac{1}{2}\\ 1 & k=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$k+k-1=0$

$k=\frac{1}{2}$ $\quad \text{rk}(A|B)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$

$=2$

$k=\frac{1}{2}$ $\quad r//s$ distinte

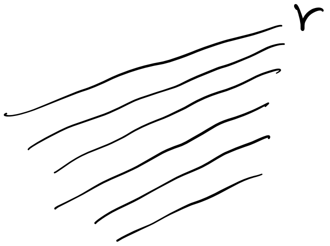
$k\neq\frac{1}{2}$ $\quad r\cap s=\{P\}$ incidenti

$$\begin{cases} y = x-1 \\ (k-1)x + k(x-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ (2k-1)x = k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{k+1}{2k-1} - 1 = \frac{2-k}{2k-1} \\ x = \frac{k+1}{2k-1} \end{cases}$$

FASCI DI RETTE

Def. Si dice FASCIO IMPROPRIO di rette l'insieme delle rette parallele ad una data

$r: ax+by+c=0$



$F: ax+by+k=0 \quad k \in \mathbb{R}$

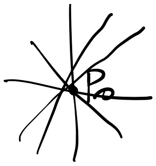
FASCIO IMPROPRIO (∞^1 rette)

Def. Dato un punto P_0 si dice FASCIO PROPRIO di centro P_0, l'insieme delle rette passanti per P_0.

Se $r: ax+by+c=0$ e $s: a'x+b'y+c'=0$ sono due rette che passano per P_0 allora

$$F: \alpha(ax+by+c) + \beta(a'x+b'y+c') = 0$$

con $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



∞^1 rette.

$P_0 = (x_0, y_0)$

$\Downarrow$ retta $x-x_0=0$ retta $y-y_0=0$

$$F: \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) = 0$$

ESEMPIO

Scrivere l'equazione del fascio proprio di rette centro $P=(2,-3)$

Prendo 2 rette parallele per P $x=2$ e $y=-3$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}: \alpha(x-2)+\beta(y+3)=0$$

ESEMPIO Scrivere l'equazione del fascio di rette parallele a $r: 4x+5y+7=0$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}: 4x+5y+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$$

ALLINEAMENTO DI 3 PUNTI

Dati $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ e $P_3=(x_3,y_3)$ del piano affine.

P_1, P_2, P_3 sono allineati ($\exists$ retta che passa per i 3 punti) $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}=0$

Se fisso 2 punti $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$, i punti $P=(x,y)$ (generici) tali che

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}=0$$

sono tutti i punti allineati con P_1 e P_2 $\Rightarrow$ trovo eq. cartesiana della retta per 2 punti.

ESEMPIO

1) I punti $P_1=(1,0)$, $P_2=(2,1)$ e $P_3=(5,1)$ sono allineati?

$$\det\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\5&1&1\end{pmatrix}=1+2-5-1=-3\neq 0$$

NON SONO ALLINEATI

2) Scrivere eq. cartesiana della retta per $P=(2,-3)$ e $Q=(1,-1)$

$$\det\begin{pmatrix}x&y&1\\2&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=-3x+y-2+3+x-2y$$

$$=-2x-y+1=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2x+y-1=0}$$

1° modo

$\vec{PQ}=Q-P=(-1,2)$

$pdr=[(\overset{-b}{-1},\overset{a}{2})]$

$2x+y+c=0 \Rightarrow 2x+y-1=0$

$c=-y-2x=1-2=-1$

$$\begin{cases}x=1-t\\y=-1+2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

Q

3) Quando $P=(1,k)$, $Q=(-k,k)$ e $R=(0,3)$ sono allineati?

$$\det\begin{pmatrix}1&k&1\\-k&k&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&k-3&0\\-k&k-3&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}R_1-R_3\\R_2-R_3\\ \end{matrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}1&k-3\\-k&k-3\end{pmatrix}=(k-3)+k(k-3)=(k-3)(1+k)$$

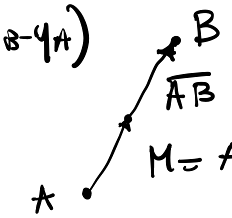
$$=0$$

$k=-1,3$

PUNTO MEDIO SEGMENTO

Dati due punti $A=(x_A, y_A)$ e $B=(x_B, y_B)$

$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $\overline{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)$

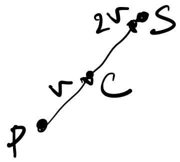


$M = A + \frac{\overline{AB}}{2}$

$M = A + \frac{\overline{AB}}{2} = (x_A, y_A) + \left(\frac{x_B-x_A}{2}, \frac{y_B-y_A}{2}\right)$

$= \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Def. Il punto S si dice **SIMMETRICO** del punto P rispetto al punto C se C è il punto medio del segmento $\overline{PS}$.



$C = P + \frac{1}{2}\overline{PS}$

$C=(x_C, y_C)$ $x_C = \frac{x_P+x_S}{2}$, $y_C = \frac{y_P+y_S}{2}$

$$\boxed{x_S = 2x_C - x_P \quad , \quad y_S = 2y_C - y_P}$$

SIMMETRIA CENTRALE

C = centro della simmetria

ESERCIZIO Sia F fascio improprio determinato dalla retta r: $2x-y-14=0$. Date le rette s: $x-y=0$ e t: $3x-2y+1=0$. Siano $S = s \cap p$ e $T = t \cap p$ dove p retta generica di F. Determinare eq. cartesiana del luogo dei punti descritto dal punto medio del segmento ST al variare di P in F.

$$F: \underbrace{2x-y+k=0}_{p} \qquad \text{(fascio improprio)}$$

$$S = s \cap p : \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-y+k=0 \end{cases} \qquad T = t \cap p : \begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 2x-y+k=0 \end{cases}$$

$$S : \begin{cases} x=y \Rightarrow x=-k \\ y+k=0 \Rightarrow y=-k \end{cases} \qquad T : \begin{cases} x-y+1-k=0 \Rightarrow x = \overbrace{y+k-1}^{-2k+1} \\ 2y+2k-2-y+k=0 \\ y=-3k+2 \end{cases}$$

$$S = (-k,-k) \qquad T = (-2k+1, -3k+2)$$

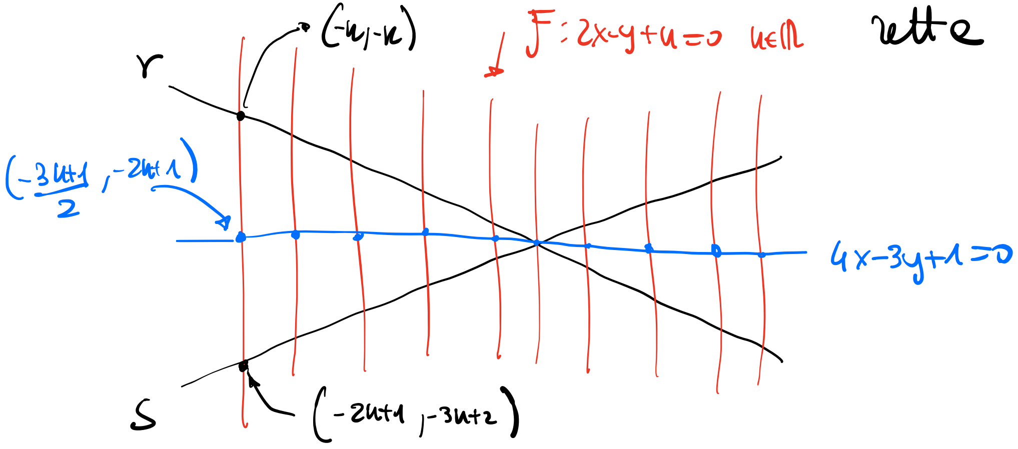
$$M = \left(\frac{-k+(-2k+1)}{2}, \frac{-k+(-3k+2)}{2} \right) = \left(-\frac{3k+1}{2}, -2k+1 \right) \quad k \in \mathbb{R}$$

Luogo è l'insieme dei punti descritti da M al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \frac{-3k+1}{2} \\ y = -2k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3\left(\frac{1-y}{2}\right)+1 \\ k = \frac{1-y}{2} \end{cases}$$

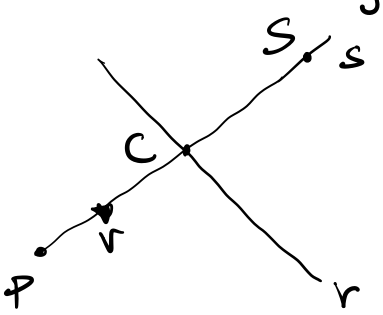
$$2x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}y + 1 \Rightarrow 4x = -3+3y+2 \Rightarrow \boxed{4x-3y+1=0}$$

retta



SIMMETRIA ASSIALE

In $A_2(\mathbb{R})$ determinare il simmetrico di $P=(0,1)$ rispetto alla retta $r: x-y=0$ nella direzione $[(1,2)]$



r= ASSE DI SIMMETRIA

$pds=[(1,2)]$

$$s: \begin{cases} x=0+t \\ y=1+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} t=x \\ y=1+2x \end{cases} \xRightarrow{\text{EQ. CART.}} 2x-y+1=0$$

$$C=r\cap s \quad \begin{cases} r: x-y=0 \\ s: 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y & \Rightarrow y=-1 \\ 2x-x+1=0 & \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$C=(-1,-1)$ S è il simmetrico di P rispetto a C

$$\begin{cases} x_C=\dfrac{x_P+x_S}{2} \Rightarrow -1=\dfrac{0+x_S}{2} \Rightarrow x_S=-2 \\ y_C=\dfrac{y_P+y_S}{2} \Rightarrow -1=\dfrac{1+y_S}{2} \Rightarrow y_S=-3 \end{cases}$$

$S=(-2,-3)$