ESERCIZIO

Dopo aver verificato che:

$$r: \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Sono <u>SGHEMBE</u>, determinare i piani paralleli che le contengono.

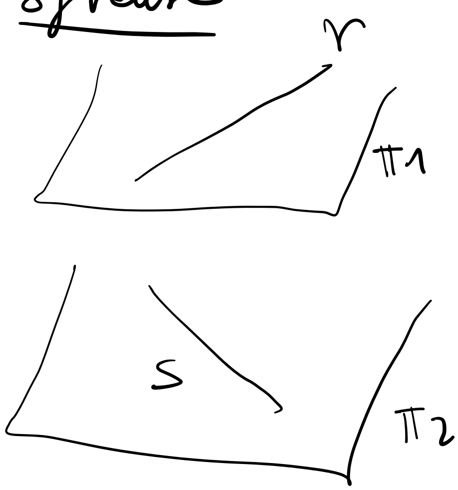
$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\det(A|B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{R_3 - R_1} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$-3 - 3 + 2 \neq 0$$

$\Downarrow$

<u>sghembe</u>



$\pi_1 // \pi_2$

π_1 e π_2 hanno come giacitura i parametri direttori di r e s.

$$r: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t-3 \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{pdr} = [(2,3,1)] \qquad \text{pds} = [(1,2,1)]$$

giacitura di π_1 e π_2 è $[(2,3,1),(1,2,1)]$

π_1 passa per un punto di r. π_2 passa per un punto di s.

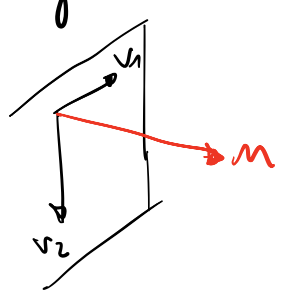
OSS.

Dato un piano

$$\pi: ax+by+cz+d=0$$

chiamiamo $n=[(a,b,c)]$, la NORMALE DEL PIANO (IPERPIANO). Tale vettore è ortogonale rispetto al prodotto scalare euclideo std agli elementi della giacitura di π.

Se la giacitura è $[v_1,v_2]$



n è la direzione ortogonale a v_1 e v_2.

Nel nostro caso la giacitura è
$$[(2,3,1),(1,2,1)]$$
quindi la normale $[(a,b,c)]$ è data dal complemento ortogonale di $V=\mathcal{L}((2,3,1),(1,2,1))$.

$$V^{\perp}=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;\begin{array}{l}(x,y,z)\cdot(2,3,1)=0\\(x,y,z)\cdot(1,2,1)=0\end{array}\right\} \quad (*)$$

$$\begin{cases}2x+3y+z=0\\x+2y+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=0 \Rightarrow y=-x\\-x+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-x\\z=x\end{cases}$$

$$V^{\perp}=\{(x,-x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,-1,1)) \qquad n=[(\overset{a}{1},\overset{b}{-1},\overset{c}{1})]$$

$$\mathcal{F}:\ x-y+z+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$$

π_1 impongo passaggio per $P\in\pi_1$, $P=(1,0,0)\in\pi_1$

$$1+k=0\Rightarrow k=-1$$

$$\boxed{\pi_1:\ x-y+z-1=0}$$

π_2 impongo passaggio per $Q\in\pi_2$, $Q=(2,-3,0)$

$$2+3+k=0 \Rightarrow k=-5$$

$$\boxed{\pi_2:\ x-y+z-5=0}$$

$B=(e_1,e_2,e_3)$

$$(*)\quad \det\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=e_1-e_2+e_3$$
$$v=(1,-1,1)$$

ALTRO METODO

Prendo fascio di piani con supporto r

$$\mathcal{F}r: \ \alpha(x-2z-1)+\beta(y-3z)=0$$

$$\alpha x+\beta y - z(2\alpha+3\beta)-\alpha=0$$

$$n=[(\alpha,\ \beta,\ -(2\alpha+3\beta))]$$

$\mathcal{F}r \supseteq \pi_1 \supseteq r$, ora devo imporre condizione di parallelismo tra $\mathcal{F}r$ e s.

$\Downarrow$

$$p_{ds}=[(l,m,n)] \qquad n=[(a,b,c)]$$

PARALLELISMO $\Rightarrow$ $al+bm+cn=0$

$$p_{ds}=[(1,2,1)] \qquad \alpha+2\beta-2\alpha-3\beta=0$$

$$-\alpha-\beta=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=-\beta}, \ \beta\neq 0$$

$$-\cancel{\beta}(x-2z-1)+\cancel{\beta}(y-3z)=0 \qquad \pi_1 \supseteq r$$

$$\pi_1: \quad x-2z-1-y+3z=0 \Rightarrow \boxed{x-y+z-1=0}$$

Adesso prendo fascio di piani // a π_1 che passa per $Q\in s$

$$Q=(2,-3,0)$$

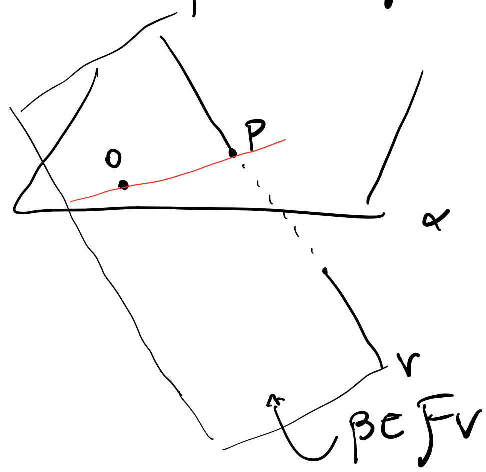
$$x-y+z+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$$

$$2+3+k=0 \Rightarrow k=-5$$

$\pi_2: x-y+z-5=0$, $\pi_2 \supseteq s$

ESERCIZIO

Determinare, se esiste, la retta appartenente al piano $\alpha: 2x-z=0$ e incidente la retta
$r: \begin{cases} x-2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ e passante per l'origine $O=(0,0,0)$.



La retta esiste se

1) $r \cap \alpha = \{P\}$
2) $O \in \alpha$ ok!

$\Rightarrow$ controllo che r e α non siano paralleli

$$pdr: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to pdr = [(2,1,1)] = [(l,m,n)]$$

$[(a,b,c)] = [(2,0,-1)]$ $\quad al+bm+cn \neq 0$ $\quad 4-1=3\neq 0$ ✓ $\quad r \nparallel S$

La retta cercata è l'intersezione tra α e il piano β che contiene r e passa per l'origine. $\beta \in Fr$

$$Fr: \alpha(x-2z+1) + \beta(y-z+1) = 0 \qquad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

impongo passaggio per $(0,0,0)$

$$\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta=-\alpha$$

$\Downarrow$

$$x-2z+\cancel{1}-y+z-\cancel{1}=0 \Rightarrow \boxed{x-y-z=0}$$

retta cercata è

$$s: \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Big\} \ \alpha \cap \beta$$

in modo, trovo P punto di intersezione tra e r, la retta $\overline{OP}$ è quella cercata (devo verificare che $\overline{OP} \subseteq \alpha$).

$$\begin{matrix} r \\ \\ \alpha \end{matrix} \begin{cases} x-2z+1=0 \\ y-z+1=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x \Rightarrow z=\frac{2}{3} \\ x-4x+1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ y-2x+1=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\left[\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right] = \left[(1,-1,2)\right]$$

$$s: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \xrightarrow{②-①} \begin{cases} x-y-z=0 \\ \boxed{2x-z=0} \end{cases} \ \alpha \supseteq s$$

Esercizio

Si studi il sistema e si dia una interpretazione geometrica

$$\begin{cases} kx+y+z=0 \\ 2x+(1+k)y+2z=k-1 \\ x+y+kz=k-1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

le eq. rappresentano 3 piani in $A_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1+k & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

$$rk(A) = rk\begin{pmatrix} 0 & 1-k & 1-k^2 \\ 0 & k-1 & 2(1-k) \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= 1 + rk\begin{pmatrix} 1-k & 1-k^2 \\ k-1 & 2(1-k) \end{pmatrix}$$

$$2(1-k)^2 - (k-1)(1-k)(1+k)$$

$$2(1-k)^2+(1-k)^2(1+k) = (1-k)^2(2+1+k) = (1-k)^2(3+k)$$

$$rk(A) = \begin{cases} 3 & k \neq 1,-3 \\ 2 & k=-3 \\ 1 & k=1 \end{cases}$$

$k \neq -3, 1$ $\quad rk(A) = rk(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^0$ sol. unica soluzione

STELLA PROPRIA DI PIANI

L'insieme di tutti i piani che passano per un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$\boxed{k=-3}$ $\quad rk(A)=2$

$$rk(A|B) = rk\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 2 & \vdots & -4 \\ 1 & 1 & -3 & \vdots & -4 \end{pmatrix} = 3$$

STELLA IMPROPRIA DI PIANI

Piani che sono tutti paralleli ad una retta data.

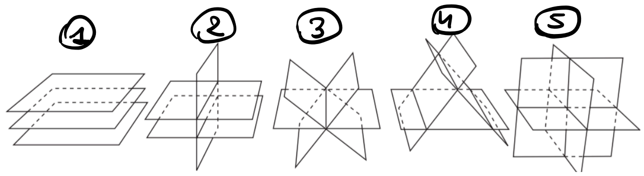
$\boxed{k=1}$ $\quad rk(A)=1$

$$rk(A|B) = \left(\quad . \quad \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) = rk(A) = 1$$

∞^2 sol. $\Rightarrow$

3 piani coincidenti $\boxed{x+y+z=0}$

POSSIBILI CONFIGURAZIONE 3 PIANI



(1) 3 piani paralleli disgiunti $rk(A)=1$ $rk(A|B)>1$ (sistema incompatibile). Se $rk(A|B)=1$ tre piani coincidenti.

FASCIO IMPROPRIO DI PIANI

(2) 2 piani paralleli disgiunti e 1 che interseca entrambi in una retta. $rk(A)=2$, $rk(A|B)=3$. I tre piani hanno una direzione in comune.

STELLA IMPROPRIA DI PIANI

(3) 3 piani che si intersecano in 1 retta. $rk(A)=2=rk(A|B)$

FASCIO PROPRIO DI PIANI

(4) 3 piani che si intersecano a 2 a 2. $rk(A)=2$, $rk(A|B)=3$
Hanno una direzione in comune.

STELLA IMPROPRIA DI PIANI

(5) 3 piani che si intersecano in un punto. $rk(A)=3=rk(A|B)$

STELLA PROPRIA DI PIANI

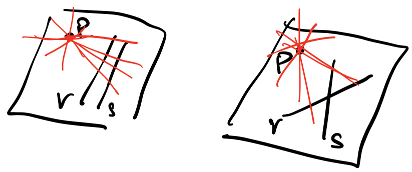
ESERCIZIO

Determinare la retta incidente $r: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$

e passante per $P=(3,3,-1)$

CASI POSSIBILI

1) rette complanari $P \in \alpha$, $r, s \subseteq \alpha$

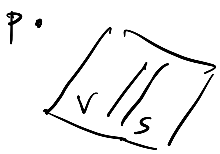


∞^1 sol.

ESISTE

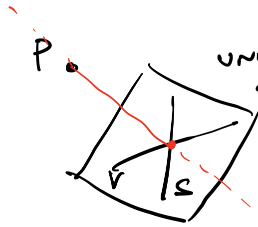
2) rette complanari $P \notin \alpha$, $r, s \subseteq \alpha$

2a)



NON ESISTE

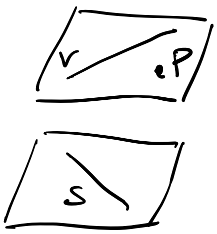
2b)



UNICA SOL.

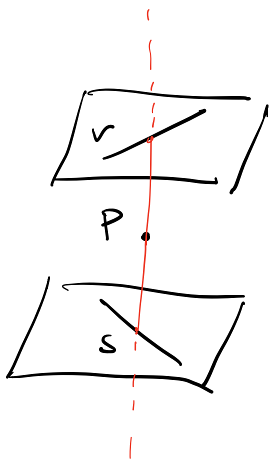
3) rette sghembe $r \subseteq \alpha$, $s \subseteq \beta$, $\alpha \parallel \beta$

3a) $P \in \alpha$ o $P \in \beta$



$\nexists$ SOLUZIONE

3b) $P \notin \alpha$ e $P \notin \beta$



$\exists!$ (UNICA) SOLUZIONE

Nel nostro caso r, s sghembe

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A|B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \neq 0$$

1) $pdr = [(0,0,1)]$ $\quad pds = [(0,1,0)]$

2) i piani paralleli sono $\alpha: x = 1$ e $\beta: x = 0$
$r \subseteq \alpha$ $\quad s \subseteq \beta$

3) $P \notin \alpha$ e $P \notin \beta \Rightarrow \exists!$ unica retta t che è incidente r e s. Retta che è complanare con r quindi $t \in \mathcal{F}r$ (fascio proprio) e con s quindi $t \in \mathcal{F}s$.

a) $\mathcal{F}r: \alpha(x-1) + \beta y = 0$

b) $\mathcal{F}s: \alpha x + \beta(z-1) = 0$

Impongo il passaggio per $P = (3, 3, -1)$

a) $\alpha(3-1) + \beta(3) = 0 \Rightarrow 2\alpha = 3\beta \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\beta$

b) $\alpha(3) + \beta(-1-1) = 0 \Rightarrow 3\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\beta$

\#

a) $3(x-1) + 2y = 0$

b) $2x + 3(z-1) = 0$

$$\Rightarrow t: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2x + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

PIANO / SPAZIO EUCLIDEO

In $E_2(\mathbb{R})$ / $E_3(\mathbb{R})$ fissiamo un RIFERIMENTO AFFINE ORTOGONALE $[O; B]$ dove

- O è un PUNTO (ORIGINE)
- $B = (e_1, e_2)$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ BASE ORTONORMALE

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

$e_1 \cdot e_2 = 0$

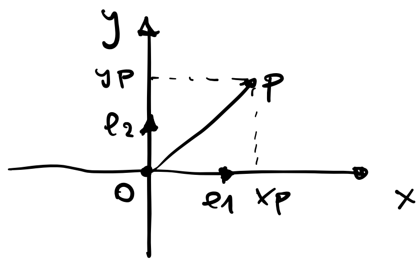
$e_1 \cdot e_3 = 0$

$e_2 \cdot e_3 = 0$

- $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO (DEF. POSITIVO)

PIANO CARTESIANO $E_2(\mathbb{R})$



$\overline{OP} = x_P e_1 + y_P e_2$

- DISTANZA TRA 2 PUNTI $\Rightarrow$ $d(P,Q) = \|\overline{PQ}\|$

In $E_2(\mathbb{R})$

$P = (x_P, y_P)$

$Q = (x_Q, y_Q)$

$\Rightarrow \overline{PQ} = (x_Q - x_P,\ y_Q - y_P)$

$$d(P,Q) = \|\overline{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

In $E_3(\mathbb{R})$

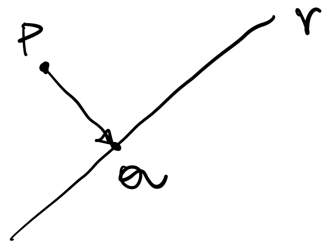
$P = (x_P, y_P, z_P)$

$Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

- **DISTANZA PUNTO - RETTA IN $E_2(\mathbb{R})$**

$P=(x_P, y_P)$ $\qquad r: ax+by+c=0$

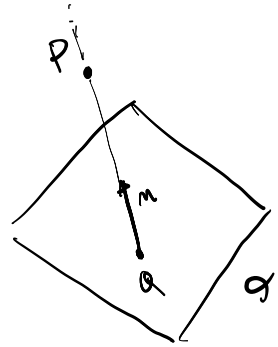


$$d(P,r) = \frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\overline{PQ}$ è ortogonale alla direzione di r.

- **DISTANZA PUNTO - PIANO IN $E_3(\mathbb{R})$**

$P=(x_P, y_P, z_P)$ $\qquad \alpha: ax+by+cz+d=0$



$$d(P,\alpha) = \frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\overline{PQ}$ è ortogonale a α

CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ

1) **RETTA - RETTA $E_2(\mathbb{R})$** $\qquad pdr=[(a,b)]$ $\qquad pds=[(a',b')]$

$r \perp s \iff (a,b)\cdot(a',b')=0 \rightarrow aa'+bb'=0$

2) **RETTA - RETTA $E_3(\mathbb{R})$**

$pdr=[(l,m,n)]$ $\qquad pds=[(l',m',n')]$

$r \perp s \iff ll'+mm'+nn'=0$

$(l,m,n)\cdot(l',m',n')=0$

3) **PIANO - PIANO**

$\pi_1: ax+by+cz+d$ $\qquad \pi_2: a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\pi_1 \perp \pi_2$ $\qquad (a,b,c)\cdot(a',b',c')=0$

$aa'+bb'+cc'=0$

3) RETTA-PIANO $\quad \text{pdr} = [(\ell, m, n)]$

$$\pi: \ ax+by+cz+d=0$$

$$r \perp \pi \iff [(a,b,c)] = [(\ell, m, n)]$$

ESEMPIO

In $E_2(\mathbb{R})$, l'equazione della retta per $P=(1,2)$ e ortogonale alla retta $r: x-3y+4=0$

$$(a,b) = (1,-3)$$

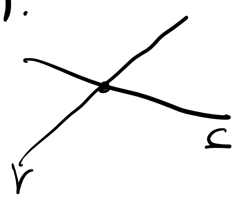
$$\text{pdr} = [(\underset{-b}{3}, \underset{a}{1})]$$

$$\text{pds} = [(a,b)] = [(\underset{-b}{1}, \underset{a}{-3})]$$

$-3x - y + c = 0 \Rightarrow$ passaggio per $P=(1,2)$ $\quad -3-2+c=0 \Rightarrow \boxed{c=5}$

$$s: \boxed{3x+y-5=0}$$

ESERCIZIO Distanze tra rette in $E_2(\mathbb{R})$.

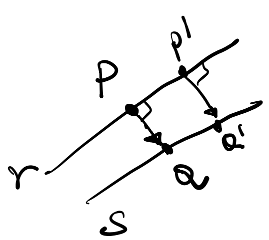


$r: 2x-y+1=0 \qquad s: 2x-y+7=0$

$$d(r,s) = \min_{\substack{P \in r,\\ Q \in S}} d(P,Q)$$

$\overline{PQ} \perp \text{pds}, \text{pdr}$

se r e s incidenti $d(r,s)=0$



$$\text{pdr} = \text{pds} = [(\underset{-b}{1}, \underset{a}{2})]$$

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t+1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$P = (0,1) \in r$$

$$d(r,s) = \underset{P \in r}{d(P,s)} = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Q è proiezione ortogonale di P su s.

Q = punto di intersezione tra retta ortogonale e s e s che passa per P.

ESERCIZIO

Determinare retta ortogonale al piano $\alpha: 2x-y-z=3$ e passante per $P=(3,1,-2)$

$$r \perp \alpha \iff \text{pdr} = [(a,b,c)]_\sim = [(2,-1,-1)]$$

$$r: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1-t \\ z = -2-t \end{cases} \to t = 1-y \xrightarrow{\text{EQ. CAR.}} \begin{cases} x = 3+2(1-y) \\ z = -2-(1-y) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ y-z-3=0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

Trovare il piano ortogonale a $r: \begin{cases} 2x-y-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ e passante per $P=(2,1,0)$

$$\Downarrow$$

$$r: \begin{cases} 3x = 2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y+z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$n = [(a,b,c)] = \underset{\text{pdr}}{[(0,1,-1)]} \qquad \alpha \perp r$$

$$r: \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = t \\ z = \frac{1}{3}-t \end{cases} \qquad \text{pdr} = [(0,1,-1)]$$

$y-z+d=0$

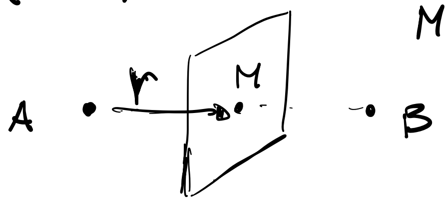
$\hookrightarrow 1+d=0 \to d=-1$

$$\boxed{y-z-1=0}$$

ESERCIZIO

Determinare il (iper) piano asse del segmento $\overline{AB}$

$A=(1,1,1)$ $\quad B=(2,-1,0)$



$M = A + \frac{\overline{AB}}{2}$ punto medio

Luogo dei punti P tali che $d(A,P)=d(P,B)$

$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$\overline{AB} = (1,-2,-1)$ $\qquad$ pdr $r = [(1,-2,-1)]$

PIANO cercato che $n = [(a,b,c)] =$ pdr $= [(1,-2,-1)]$ e passa per M.

↑ NORMALE

$x-2y-z+d=0$ impongo passaggio per $M=\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + d = 0 \Rightarrow d=-1$ $\qquad \boxed{x-2y-z-1=0}$

ESERCIZIO

Determinare il piano per $A=(1,2,1)$ ortogonale a $\alpha: x-y+z=0$ e $\beta: 2x+z=1$

$(a,b,c)\cdot(1,-1,1) = a-b+c=0 \Rightarrow a=-b$

$(a,b,c)\cdot(2,0,1) = 2a+c=0 \Rightarrow c=-2a=2b$

$n = [(-b,b,2b)] = [(-1,1,2)]$ $\qquad -x+y+2z+d=0$ $\qquad -1+2+2+d=0 \Rightarrow d=-3$

$\boxed{-x+y+2z-3=0}$