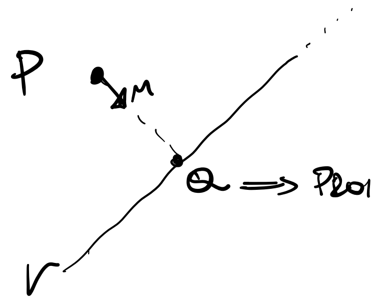
Proiezioni ortogonali in $E_2(\mathbb{R})$ / $E_3(\mathbb{R})$

In $E_2(\mathbb{R})$

$r: ax+by+c=0 \qquad n=[(a,b)]$

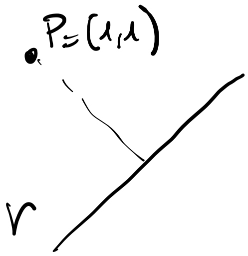
$P=(x_P, y_P)$



$Q \Longrightarrow$ PROIEZIONE ORTOGONALE DI P SU r

1) trovo retta $s \perp$ a r che passa per P

2) interseco s con r e trovo Q proiezione ortogonale



$-x+2y+c=0$

$-1+2+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

$r: 2x+y=0 \qquad n=[(2,1)]$

$\text{pdr}=[(-1,2)]$

$$\begin{cases} s: -x+2y-1=0 \\ r: 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-4x-1=0 \\ y=-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1/5 \\ y=2/5 \end{cases}$$

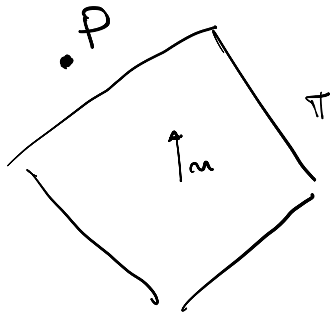
$$Q=\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

OSS.

Se $P\in r$ allora la proiezione ortogonale è P stesso.

In $E_3(\mathbb{R})$

PROIEZIONE di P su π



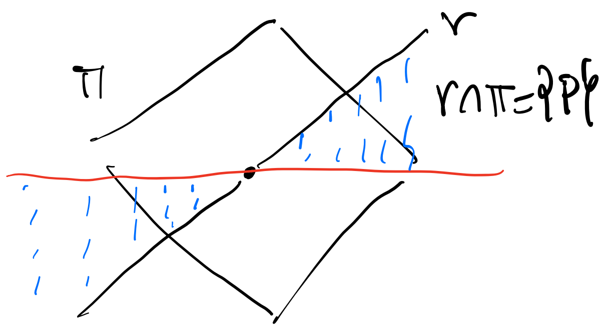
$\pi: ax+by+cz+d=0$

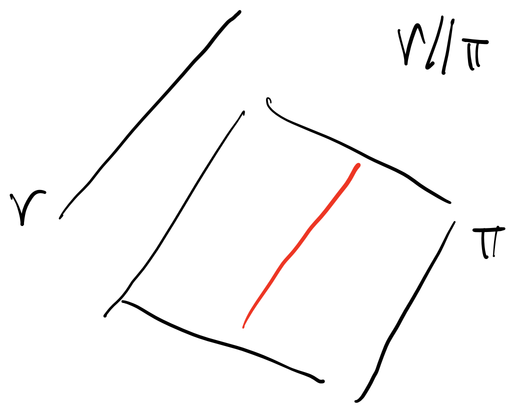
$P \in \pi \Rightarrow Q = P$ proiezione ortogonale

1) trovo retta $s \perp$ al piano π che passa per P.

2) Interseco s con π e trovo Q proiezione ortogonale

PROIEZIONE di r su π





- Se $r \subseteq \pi \Rightarrow$ la proiezione ortogonale è la retta stessa r

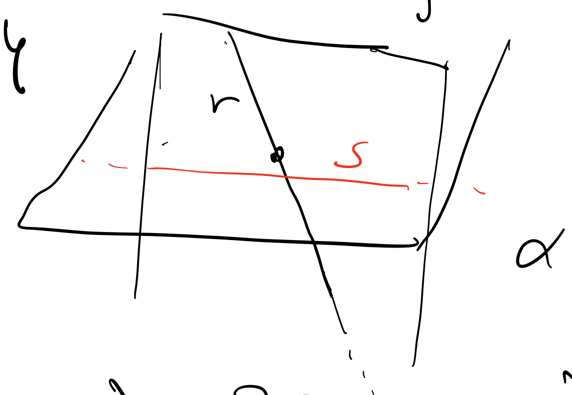
1) Trovo piano $\alpha \in \mathcal{F}_r$ contenente r ed ortogonale a π (unico)

2) la proiezione ortogonale è la retta data dall'intersezione di α con π. $\underline{r = \alpha \cap \pi}$

ESERCIZIO

Determinare il piano per $r: \begin{cases} 2x-z=3 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$ e ortogonale a $\alpha: 3x-y+z=1$

$r \cap \alpha = \{(0,-4,-3)\}$



$\pi \in F_r: \alpha(2x-z-3)+\beta(x+y-2z-2)=0$

$(2\alpha+\beta)x+\beta y - z(\alpha+2\beta)-3\alpha-2\beta=0$

$n=(2\alpha+\beta, \beta, -\alpha-2\beta)$

$n \cdot (3,-1,1)=0 \Rightarrow 6\alpha+3\cancel{\beta}-\cancel{\beta}-\alpha-2\cancel{\beta}=0$

$5\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=0}$

$\beta \neq 0$

$\boxed{x+y-2z-2=0}$

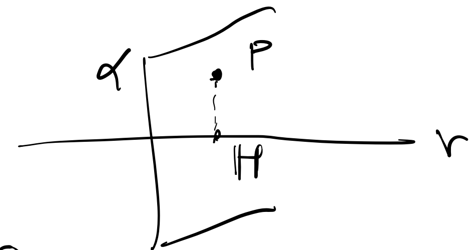
$s: \begin{cases} x+y-2z=2 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$

PROIEZIONE ORTOGONALE DI r su α

ESERCIZIO

In $E_3(\mathbb{R})$ si trovi la PROIEZIONE ORTOGONALE del punto $P=(1,0,1)$ nella retta

$$r: \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$$



α piano passante per P ed ortogonale ad r $\quad [(a,b,c)]_\alpha = pd\, r$

$$= [(2,1,5)]$$

$$\begin{cases} z = 4t+t-1 = 5t-1 \\ x=2t \\ y=t \end{cases}$$

$$2x+y+5z+d=0$$

passaggio per $P=(1,0,1) \Rightarrow d=-7$ $\quad y=\frac{2}{5}$ $\quad 30y=12$

$H=\alpha \cap r$, $\begin{cases} 2x+y+5z-7=0 \Rightarrow 4y+y+25y-5-7=0 \\ 2x+y-z=1 \Rightarrow z=5y-1=1 \\ x-2y=0 \Rightarrow x=2y=\frac{4}{5} \end{cases}$

$H=\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$

ed equazione retta passante per P ed incidente r e ad essa ortogonale.

$$\overline{PH} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) \qquad pd\,s = [(-1,2,0)]$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - x \\ \boxed{\begin{matrix} y = 2 - 2x \\ z = 1 \end{matrix}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

RETTA MINIMA DISTANZA

Date 2 rette r, s sghembe esiste una sola retta t INCIDENTE e ORTOGONALE ad entrambe le rette. t è detta RETTA DI MINIMA DISTANZA poiché individua i punti $R \in r$ e $S \in s$ aventi minima distanza.

1) Determino $pd\,r$, $pd\,s$

2) impongo che t sia ORTOGONALE ad r e s
$\Rightarrow pd\,t$

3) trovo piano α contenente r e $\parallel t$

4) trovo piano β contenente s e $\parallel t$

$$\Rightarrow \boxed{t = \alpha \cap \beta}$$

ESERCIZIO

Determinare la retta di minima distanza tra

$r: \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

r e s SGHEMBE

1) $pdr = [(1, 2, 1)]$, $pds = [(0, 0, 1)]$

2) $\begin{cases} l + 2m + n = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = -2m \\ n = 0 \end{cases} \quad m \neq 0$

$pdt = [(-2m, m, 0)] = [(-2, 1, 0)]$

3) $Fr: \alpha(x - z - 1) + \beta(2x - y) = 0$

$(\alpha + 2\beta)x - \beta y - \alpha z - \alpha = 0$

$n = (\alpha + 2\beta, -\beta, -\alpha) \cdot (-2, 1, 0) = 0$

$-2\alpha - 4\beta - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{2}\beta$

$5(x - z - 1) - 2(2x - y) = 0$

4) $Fs: \alpha(x - 1) + \beta(y - 1) = 0$

$$\alpha x + \beta y - \alpha - \beta = 0$$

$$n = (\alpha, \beta, 0) \cdot (-2, 1, 0) = 0$$

$$-2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

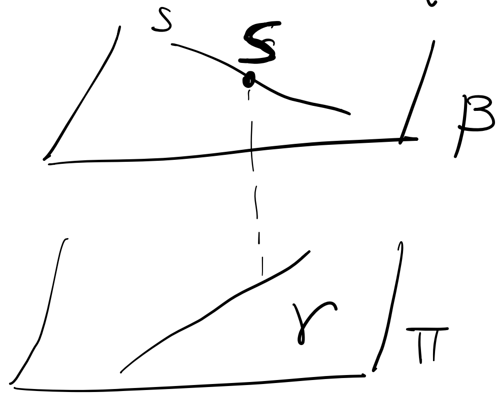
$$x - 1 + 2(y-1) = 0$$

$$\boxed{t: \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}}$$

DISTANZA TRA RETTE SGHEMBE

$$s: \begin{cases} y + 5x - 3 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\text{pds} = [(1, -5, 0)]$



Trovo il piano , $r \subseteq \pi$ e $\pi // \beta$

$d(r, s) = d(S, \pi)$ dove $S \in \pi$

$\pi \in \mathcal{F}r \; : \; \alpha(x+1) + \beta(y-2) = 0$

$$\alpha x + \beta y + \alpha - 2\beta = 0$$

$n = (\alpha, \beta, 0) \qquad (\alpha, \beta, 0) \cdot (1, -5, 0)$

$$= \alpha - 5\beta = 0$$

$$\alpha = 5\beta$$

$$5x + 5 + y - 2 = 0$$

$$\pi : \boxed{5x + y + 3 = 0}$$

$$d(r, s) = d(S, \pi) = \frac{\left| \overset{ax_0}{0} + \overset{by_0}{3} + \overset{cz_0}{0} + \overset{d}{3} \right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 0^2}}$$

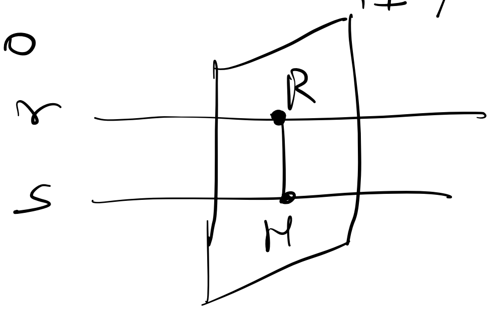
$S = (0, 3, -3)$

$$= \frac{6}{\sqrt{26}}$$

DISTANZA RETTE PARALLELE

$r : \begin{cases} 5x + y = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 5x + y + 26 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\alpha \perp r, s$



pd r = pd s = $[(1, -5, 0)]$

Scelgo un punto $R \in r$

$R = (0,0,-3)$ $\qquad \alpha: x - 5y + d = 0$

$d = 0$

$$H \begin{cases} \alpha: x - 5y = 0 \\ s: 5x + y + 26 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5y = -5 \\ 25y + y + 26 = 0 \Rightarrow y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\alpha \cap s$ $\qquad H = (-5, -1, 0)$

$$d(r,s) = d(R,H) = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+1+9}$$

$$= \sqrt{35}$$

Ampliamento e Complessificazione $A_2(\mathbb{R})/E_2(\mathbb{R})$
$A_3(\mathbb{R})/E_3(\mathbb{R})$

Ampliamento $\tilde{A}_2(\mathbb{R})/\tilde{E}_2(\mathbb{R})$

Punti

- **Propri**

  $P=[(x_1,x_2,x_3)] \in \tilde{A}_2(\mathbb{R})/\tilde{E}_2(\mathbb{R})$

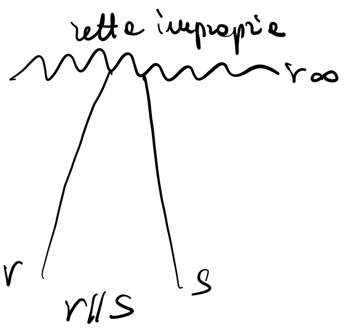
  con $x_3 \neq 0$

  $P \in A_2(\mathbb{R})/E_2(\mathbb{R}) \quad P=(x,y)$

  $x=\dfrac{x_1}{x_3}, \quad y=\dfrac{x_2}{x_3}$

- **Impropri** (punti all'infinito)

  $P_\infty=[(l,m,0)]$ rappresentano le direzione di una retta; $[(l,m)]$ classe dei parametri direttori delle rette.



$[(x_1,x_2,x_3)] \Rightarrow$ **coordinate omogenee**

Rette

- **Propria** $r: ax_1+bx_2+cx_3=0 \quad (a,b)\neq(0,0)$

  $r\in A_2(\mathbb{R}) \quad r: ax+by+c=0$

  sono le rette a cui viene aggiunto punto improprio $P_\infty=[(-b,a,0)]$

- **Impropria** $r_\infty: x_3=0$

  è l'unione di tutti i punti impropri (tutte le direzioni delle rette)

  $[(l,m,0)]$

AMPLIAMENTO IN $A_3(\mathbb{R})$, $E_3(\mathbb{R})$

PUNTI

PROPRI: $P = [(x_1, x_2, x_3, x_4)]$ $x_4 \neq 0$

$P \in A_3(\mathbb{R})$ $P = (x, y, z)$ $x = \frac{x_1}{x_4}$ $y = \frac{x_2}{x_4}$ $z = \frac{x_3}{x_4}$

IMPROPRI: $P_\infty = [(l, m, n, 0)]$

rappresenta direzione di una retta; $[(l, m, n)]$ classe di parametri direttori delle rette aventi direzione P_∞.

PIANI

PROPRI: $\pi: ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$\pi \in A_3(\mathbb{R})$ $\pi: ax + by + cz + d = 0$

IMPROPRIO: $\pi_\infty: x_4 = 0$ insieme di tutti i punti impropri

EQ. OMOGENEA PIANO $\Rightarrow$ $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$

RETTE

PROPRIE: $r: \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases}$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

IMPROPRIE: $r_\infty: \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

COMPLESSIFICAZIONE $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$, $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$

$P \in \tilde{A}_2(\mathbb{C})$ è reale $\Leftrightarrow$ $P = \overline{P}$

$P = (x_P, y_P)$

$\overline{P} = (\overline{x_P}, \overline{y_P})$

RETTA $r: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è REALE $\Leftrightarrow rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 1$

COMPLESSIFICAZIONE $\tilde{A}_3(\mathbb{C}), \tilde{E}_3(\mathbb{C})$

PIANO $\pi: ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$ è REALE $\Leftrightarrow \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}=1$

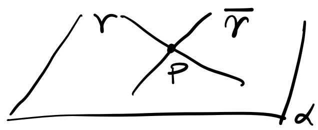
RETTA $r: \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4=0 \end{cases}$ è REALE $\Leftrightarrow \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' & \bar{d}' \end{pmatrix}=2$

$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=2$

- Sia π piano IMMAGINARIO (NON REALE) $\Rightarrow r=\pi\cap\bar{\pi}$ è reale ed è l'unica retta reale $\subset \pi$
- Il piano che contiene 2 rette immaginarie e coniugate, se esiste, è reale

Def.
Una retta è detta:

- IMMAGINARIA DI I^a SPECIE se è complanare con la propria coniugata



P, α sono REALI

- IMMAGINARIA DI II^a SPECIE se è SGHEMBA con la propria coniugata $\Rightarrow$ r non ha punti reali e non esistono piani reali che la contengono.

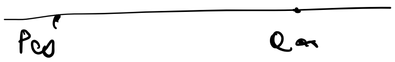
EX. In $A_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale delle rette del piano $\alpha: 3ix+y-iz+2=0$

$r=\alpha\cap\bar{\alpha}$ unica retta reale

$$r: \begin{cases} 3ix+y-iz+2=0 \\ -3ix+y+iz+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix}\begin{cases} y+2=0 \\ 3ix-iz=0 \Rightarrow 3x-iz=0 \end{cases}$$

Ex. $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ rette passanti per $P_\infty=[(0,1,-3,0)]$ e $Q_\infty=[(0,5,9,0)]$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}=2$$



trovo il piano di giacitura $[(0,1,-3),(0,5,9)]$

$$\begin{cases} y-3z=0 \\ 5y+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3z \Rightarrow y=0 \\ 15z+9z=0 \Rightarrow z=0 \end{cases} \qquad n=[(a,b,c)]=[(1,0,0)]$$

$\Downarrow$

$$r:\begin{cases} x_1=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

Ex. $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ rette passanti per $P_\infty=[(1,4,2,0)]$ e $Q_\infty=[(1,3,-7,0)]$

piano di giacitura $[(1,4,2),(1,3,-7)]$

$$\begin{cases} a+4b+2c=0 \\ a+3b-7c=0 \end{cases} \Rightarrow \ominus\begin{cases} b+9c=0 \Rightarrow b=-9c \\ a-27b-7c=0 \Rightarrow a=34c \end{cases}$$

$$n=[(34c,-9c,c)]=[(34,-9,1)]$$

$$r:\begin{cases} 34x_1-9x_2+x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

Ex. In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ $(\mathbb{P}^3\mathbb{C})$ si determini il punto di intersezione delle rette

$$r:\begin{cases} x-y-7=0 \\ 2x+3y-4=0 \end{cases} \quad e \quad s:\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-9y-10=0 \end{cases}$$

$$pd_r=pd_s=[(0,0,1)] \Rightarrow r\cap s=[(0,0,1,0)]=P_\infty$$

Ex. In $\tilde{A}_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione omogenea della retta comune ai piani

$$\alpha:\ 3x-3y+6z-10=0 \quad e \quad \beta:\ x-y+2z+17=0$$

$$\alpha \parallel \beta \qquad \text{rk}\begin{pmatrix}3 & -3 & 6\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=1$$

$r=\alpha\cap\beta$ retta impropria

$$r: \begin{cases} 3x_1-3x_2+6x_3-10x_4=0\\ x_1-x_2+2x_3+17=0\end{cases} \Rightarrow \quad s: \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0\\ x_4=0\end{cases}$$

Ex. In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ si dica se la retta $r: \begin{cases}(1+i)x_1-ix_3+x_4=0\\ ix_1+2x_2+(i-2)x_3=0\end{cases}$ è reale, imm. I^a specie, imm. II^a specie.

$r\neq\bar{r} \Rightarrow r$ immaginaria
- I^a specie $r,\bar{r}$ complanari
- II^a specie $r,\bar{r}$ sghembe

$$\bar{r}: \begin{cases}(1-i)x_1+ix_3+x_4=0\\ -ix_1+2x_2+(-i-2)x_3=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1+i & 0 & -i & 1\\ i & 2 & i-2 & 0\\ 1-i & 0 & i & 1\\ -i & 2 & -i-2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}\cancel{1+i} & \cancel{0} & \cancel{-i} & \cancel{1}\\ i & 2 & i-2 & 0\\ -2i & 0 & 2i & 0\\ -i & 2 & -i-2 & 0\end{pmatrix}_{R_3-R_1} = -\det\begin{pmatrix}i & 2 & i-2\\ -2i & 0 & 2i\\ -i & 2 & -i-2\end{pmatrix}$$

$$=-\det\begin{pmatrix}\cancel{i} & \cancel{2} & \cancel{i-2}\\ -2i & 0 & 2i\\ -2i & 0 & -2i\end{pmatrix}_{R_3-R_1} = \det\begin{pmatrix}-2i & 2i\\ -2i & -2i\end{pmatrix}\neq 0$$

$4i^2+4i^2=-8$

$\Rightarrow$ r è di II^a specie $\Rightarrow$ non ha punti reali

Ex.

In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si determino:

1) la retta reale passante per $P = [(2, i, 1)]$

$P \Rightarrow$ immaginario $P \neq \overline{P}$ $\quad rk\begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ 2 & -i & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\Downarrow$

$\exists!$ unica retta reale che passa per P ed è la congiungente P e $\overline{P}$. $\quad P = (2, i) \quad \overline{P} = (2, -i) \quad \overline{PP} = (0, -2i)$

$pdr = [(0, -2i)] = [(0, 2)]$ $\quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - it \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2}$

CONICHE IN $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ (curva algebrica reale piana II° ordine)

EQ. CONICA

1) coordinate non omogenee (x, y)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

2) coordinate non omogenee (x_1, x_2, x_3)

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

MATRICE ASSOCIATA $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$A = A^t$

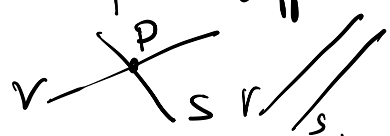
Posto $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{X^t A X}_{} = (x_1\ x_2\ x_3)\, A \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

EQ. MATRICIALE CONICA

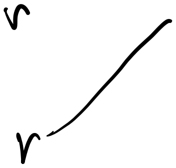
$(x,y,1)\, A \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = 0$

coordinate non omogenee

- Se $rk(A)=3$, $\det(A)\neq 0 \Rightarrow$ CONICA GENERALE priva di punti doppi
- Se $\det(A)=0$ conica degenere
  - $rk(A)=2$ $\exists!$ unico punto doppio (SEMPLICEMENTE DEGENERE) $\Rightarrow C=r\cup s$



  - $rk(A)=1 \Rightarrow$ conica doppiamente degenere $\Rightarrow \infty$ punti doppi $\Rightarrow C=r\cup r$



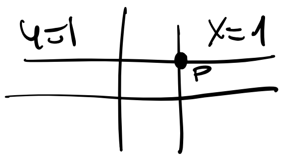
ES.

1) conica generale $C: x^2+y^2=1$

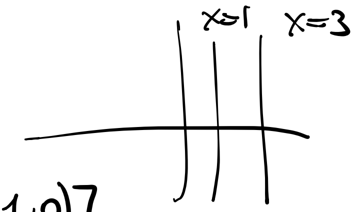
circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio 1

2) conica semplicemente degenere $C: (x-1)(y-1)=0$

P punto doppio $P=(1,1)$



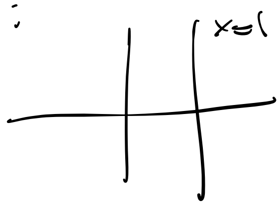
$C: (x-3)(x-1)=0$



punto doppio P è un punto all'infinito $P_\infty = [(0,1,0)]$

3) conica doppiamente degenere C:

$$C: (x-1)^2=0$$



punti doppi sono tutti i punti della retta $x=1$

CLASSIFICAZIONE AFFINE CONICHE GENERALI $(\det A \neq 0)$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- Se $\det(A^*) > 0 \Rightarrow$ ELLISSI — 2 punti impropri immaginari e coniugati
- Se $\det(A^*) = 0 \Rightarrow$ PARABOLA — 2 punti impropri reali e coincidenti
- Se $\det(A^*) < 0 \Rightarrow$ IPERBOLE — 2 punti reali e distinti

$\Updownarrow$

$$C: \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \quad \text{(retta impropria)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ considero x_2 come costante

$$\Delta = 4a_{12}^2 x_2^2 - 4a_{11}a_{22}x_2^2$$

$$\Delta = 2x_2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$$

ESERCIZI

Stabilire se le seguenti coniche sono generali o degeneri, nel caso siano degeneri determinare le rette che la compongono.

1) $C: 3x^2 + xy + 6x + 2y = 0$

$C: 3x_1^2 + x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = 0$

$\Downarrow$

degenere

$rk(A) = 2 \Rightarrow$ semplicemente degenere

$C: 3x(x+2) + y(x+2) = (3x+y)(x+2) = 0$

$C: (3x_1 + x_2)(x_1 + 2x_3) = 0$

$P = r \cap s = \begin{cases} 3x + y = 0 \Rightarrow y = 6 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

$P = (-2, 6)$ è l'unico punto doppio.

2) $C: x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$

$\det(A^*) > 0$

$\Downarrow$

C ELLISSE

3) $C: x^2+2xy+y^2+6x+6y+9=0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $rk(A)=1$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ punto doppio

$C = r \cup r$

$r: x_1+x_2+3x_3=0$ $r: x+y+3=0$

$C: (x+y+3)^2=0$

4) $C: x^2+y^2+2xy+1=0$ $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$

$C: x_1^2+y_1^2+2x_1x_2+x_3^2=0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ 1=0 \end{cases}$ ✗ $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2=-x_1 \\ x_3=0 \end{cases}$

$C = r \cup s$

$P = r \cap s$ punto doppio

$P = [(x_1,-x_1,0)] = [(1,-1,0)]$

punto improprio

ES.

Trovare i punti impropri della conica $\Rightarrow C \cap r_\infty$

$C: x^2+2xy-3y^2-x-3y=0$

$C: x_1^2+2x_1x_2-3x_2^2-x_1x_3-3x_2x_3=0$

$\begin{cases} C & x_1^2+2x_1x_2-3x_2^2=0 \\ r_\infty & x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$

Punti impropri $\Rightarrow$ pongo $x_2=1$

$x_1^2+2x_1-3=0$

$(x_1+3)(x_1-1)=0 \quad x_1=-3, \; x_1=1$

$R_\infty=[(-3,1,0)] \quad S_\infty=[(1,1,0)]$