ESERCIZIO

Dimostrare che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ovvero che $\mathbb{Z}$ è NUMERABILE

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono insiemi infiniti (infinito numero di elementi).

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \text{ positivo} \\ -2x+1 & x \text{ negativo} \end{cases}$

$\ldots \; -2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2 \ldots \; \mathbb{Z}$

$\ldots \; 5 \; 3 \; 1 \; 2 \; 4 \ldots \; \mathbb{N}$

$\longleftarrow$ dispari $\qquad$ pari $\longrightarrow$

$\forall x_1, x_2 \;\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ INIETTIVA!

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x \; ; \; f(x) = n$?

n pari $x = \frac{n}{2}$

n dispari $x = -\frac{(n-1)}{2}$

SURIETTIVA!

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x/2$ (NON È UNA FUNZIONE)

Gruppi, Anelli, Campi

↳ STRUTTURE ALGEBRICHE

- Gruppo: 1 OPERAZIONE BINARIA
- Anello, Campo: 2 OPERAZIONI BINARIE

OPERAZIONE BINARIA (FUNZIONE)

$$*: G \times G \to G$$
$$(a,b) \mapsto a * b$$

OPERAZIONE n-ARIA

$$f: \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n\text{-volte}} \to G$$

In un Gruppo $(G, *)$ possiamo sempre risolvere eq.

$$\boxed{\begin{array}{l} x * a = b \\ a * x = b \end{array}}$$

$(\mathbb{Z},+)\;(\mathbb{Q},+)\;(\mathbb{R},+)\;(\mathbb{C},+)\;(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)\;(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

GRUPPI (ABELIANI)

$(\mathbb{N},+)\;(\mathbb{N}_0,+)\;(\mathbb{Z},-)$

NON SONO GRUPPI

$a - b := a + (-b)$

$(\mathbb{C},\cdot)\;(\mathbb{R},\cdot)\;(\mathbb{Q},\cdot)\;(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$

NON SONO GRUPPI

IN UN CAMPO $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ POSSIAMO SEMPRE RISOLVERE EQ.

$$\boxed{a \cdot x + b = 0}$$

$\exists\, b^{-1} \in \mathbb{K}$
$\exists\, a^{-1} \in \mathbb{K}$
0 EL. NEUTRO $(\mathbb{K}, +)$
1 EL. NEUTRO $(\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$

ESERCIZI

DIRE SE $(\underbrace{2\mathbb{Z}+1}_{\text{INTERI DISPARI}}, +)$, $(4\mathbb{Z}, +)$

SONO GRUPPI.

$a, b \in 2\mathbb{Z}+1$, $a+b \notin 2\mathbb{Z}+1$

QUINDI $+$ NON È NEPPURE UN OPERAZIONE

$a+b \in 4\mathbb{Z}$, $a+b \in 4\mathbb{Z}$. ES. $n=2$ $a, b \in 4\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$

1) EL. NEUTRO $0 \in 4\mathbb{Z}$ $0+a = a+0 = a$

2) ESISTE INVERSO $\forall a \in 4\mathbb{Z}$, $a + (-a) = (-a) + a = 0$

3) PROP. ASSOCIATIVA $\forall a, b, c \in 4\mathbb{Z}$ $a+(b+c) = (a+b)+c$

$(4\mathbb{Z}, +)$ È UN GRUPPO

DIRE SE $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ SONO CAMPI.

- $(\mathbb{Z}_2, +)$ GRUPPO ABELIANO
- $(\mathbb{Z}_2\setminus\{0\}, \cdot)$ GRUPPO ABELIANO
- $(\mathbb{Z}_4, +)$ GRUPPO ABELIANO
- $(\mathbb{Z}_4\setminus\{0\}, \cdot)$ NON È GRUPPO

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	1
1	1

PROP. DIST.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

NON ESISTE INVERSO DI 2 !!

ESERCIZIO Sia $A=\{r+s\sqrt{2} \mid r,s\in\mathbb{Q}\}$ DIRE SE È UN CAMPO.

$$(r_1+s_1\sqrt{2})+(r_2+s_2\sqrt{2}) = \underbrace{(r_1+r_2)}_{r'} + \underbrace{(s_1+s_2)}_{s'}\sqrt{2} = r'+s'\sqrt{2}\in A$$

$$(r_1+s_1\sqrt{2})(r_2+s_2\sqrt{2}) = \underbrace{(r_1r_2+2s_1s_2)}_{r'} + \underbrace{(r_1s_2+r_2s_1)}_{s'}\sqrt{2}\in A$$

OPERAZIONI INTERNE

$(A,+)$ GRUPPO ABELIANO $\forall\, r+s\sqrt{2}\in A$ INVERSO $-r-s\sqrt{2}\in A$

$(A\setminus\{0\},\cdot)$ GRUPPO ABELIANO $\forall\, r+s\sqrt{2}\in A$ $\dfrac{1}{r+s\sqrt{2}}\cdot\dfrac{r-s\sqrt{2}}{r-s\sqrt{2}} = \dfrac{r}{r^2-2s} - \dfrac{s}{r^2-2s}\sqrt{2}$

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ È UN ANELLO COMMUTATIVO $\Rightarrow$ STESSE PROPRIETÀ DEL CAMPO MA $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ PUÒ NON AMMETTERE INVERSI.

$\Downarrow$

ANELLO DEI POLINOMI A COEFFICIENTI IN R (ANELLO)

$$p(x)\in R[x] \Leftrightarrow p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

$(R[x],+,\cdot)$ $\qquad R=\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{C}$

ESEMPIO

$p_1(x)=2x+x^2 \qquad p_2(x)=1+3x$

SOMMA: $p_1(x)+p_2(x) = 1+5x+x^2$

PRODOTTO: $p_1(x)\cdot p_2(x) = (2x+x^2)(1+3x) = 2x+6x^2+x^2+3x^3$
$= 2x+7x^2+3x^3$

LE MATRICI

Def: Una **MATRICE** è una tabella del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} m \times n \\ m \text{ righe} \\ n \text{ colonne} \end{array}$$

Elementi $a_{ij} \in \mathbb{K}$ CAMPO $\Rightarrow$ $\mathbb{K}^{m,n}$ = insieme delle matrici $m \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$

DIAGONALE PRINCIPALE $\Rightarrow$ elementi a_{ii}

Se $m = n$ $\Rightarrow$ MATRICE QUADRATA di ordine n

$$M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n,n}$$

a_{ij} <
- i indice di riga $1 \leq i \leq m$ (m righe)
- j indice di colonna $1 \leq j \leq n$ (n colonne)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3} \\ e & \pi & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

← CAMPO

SOMMA DI DUE IRRAZIONALI PUÒ ESSERE RAZIONALE $(4-\pi)+\pi=4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi+e & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$?

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

MATRICI QUADRATE

$M_n(\mathbb{K})$ = insieme matrici quadrate di ordine n.

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice:

1) **TRIANGOLARE SUPERIORE** se $a_{ij}=0 \quad \forall i>j$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \ddots \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) **TRIANGOLARE INFERIORE** se $a_{ij}=0 \quad \forall i<j$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & \emptyset \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) DIAGONALE se $a_{ij}=0 \quad \forall i \neq j$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4) MATRICE NULLA $\phi_n \quad a_{ij}=0 \quad \forall i,j$

$$\phi_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) MATRICE IDENTICA $I_n \quad \begin{cases} a_{ij}=0 & \forall i \neq j \\ a_{ii}=1 & \forall i=1,\dots,n \end{cases}$

$$I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE RIGA / COLONNA

Def: Una matrice $A=(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice

1) MATRICE RIGA se $m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1,4}$

2) MATRICE COLONNA $n=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,1}$

Oss: Ogni matrice si può vedere come mat. riga / colonna (una riga di matrici colonna / colonna di mat. riga)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,4}$$

SCRITTA PER RIGHE

$$A = \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} R1 &= (1\ 2\ 1\ 4) \\ R2 &= (0\ 6\ 5\ 1) \\ R3 &= (7\ 0\ 0\ 2) \end{aligned}$$

SCRITTA PER COLONNE

$$A = (C_1\ C_2\ C_3\ C_4) \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \dots,$$

OPERAZIONI TRA MATRICI

1) ADDIZIONE

Siano $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice **SOMMA** di A e B la matrice $C = A+B \in \mathbb{K}^{m,n}$ i cui elementi sono $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ

1) ASSOCIATIVA $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) EL. NEUTRO $A+\Phi = \Phi+A = A$
3) EL. OPPOSTO $A=(a_{ij}) \to -A=(-a_{ij})$
4) COMMUTATIVA $A+B=B+A$

$\Rightarrow (\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un GRUPPO ABELIANO

2) PRODOTTO PER UNO SCALARE

Dati $k \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice PRODOTTO DI k per A la matrice $C = kA \in \mathbb{K}^{m,n}$ i cui elementi sono $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $1 \le i \le m$ $1 \le j \le n$

$k=2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $kA = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ $h, k \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

1) $h(kA) = (hk)A$
2) $k(A+B) = kA + kB$
3) $(k+h)A = kA + hB$
4) $1 \cdot A = A$ (1 è l'elemento neutro del prodotto di $\mathbb{K}$)

ESEMPIO

$$2\left[3\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix}3&12\\6&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&24\\12&0\end{pmatrix}$$

$$(2\cdot 3)\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&24\\12&0\end{pmatrix}$$

3) PRODOTTO DI DUE MATRICI

Date $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ si dice PRODOTTO RIGHE PER COLONNE di A e B la matrice $C = AB \in \mathbb{K}^{m,p}$ il cui elemento c_{ij} si ottiene sommando i prodotti "termine a termine" della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ESEMPI

1) $A = \begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\qquad B = \begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix}_{2\times 2}$

$$C = AB \in M_2(\mathbb{K}) \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (2\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2+0=2 \qquad c_{12} = (2\ 0)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 6+0=6$$

$$c_{21} = (1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1+0=1 \qquad c_{22} = (1\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3-1=2$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

$\exists AB$? $AB \in M_2(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K}^{2,2})$

$\exists BA$? $BA \in M_3(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K}^{3,3})$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10+0 & 0+6-6 \\ 0-5+0 & 0-3+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 & 3+0 \\ 5+0 & 10-3 & 15+0 \\ 0+0 & 0+2 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\in M_3(\mathbb{K})$$

$\Rightarrow \quad AB \neq BA$

N.B. le PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO

Date $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p} \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{m,p}$

Se $m \neq p$, BA NON HA SENSO!!!

Se $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB, BA \in M_n(\mathbb{K})$ ma in generale $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 2-24 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -22 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. $AB = \emptyset \not\Rightarrow A = \emptyset$ o $B = \emptyset$

Oss. Perché il prodotto tra matrici è definito in questo modo?

FUNZIONE LINEARE

$f: A \to B$ M_1 matrice di f $(m \times n)$

$g: B \to C$ M_2 matrice di g $(n \times p)$

$\underbrace{g \circ f}_{g(f(x))\ x \in A} : A \to C$ $M_1 M_2$ matrice di $g \circ f$ $(m \times p)$

PROPRIETÀ $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

1) ASSOCIATIVA: $(AB)C = A(BC)$
2) EL. NEUTRO: I_n $A \cdot I_n = I_n \cdot A$
3) DISTRIBUTIVA A SX: $A(B+C) = AB + AC$
4) DISTRIBUTIVA A DX: $(A+B)C = AC + BC$

ESEMPI

1) $\underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2x+5y-3z \end{pmatrix} \in M_1(\mathbb{K}) \Rightarrow 2x+5y-3z \in \mathbb{K}$

2) $\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -5 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} -2y+z-5t=0 \\ 6x+3y-7t=-2 \end{cases}$

Def. Data $A=(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice **TRASPOSTA** di A la matrice $A^t \in \mathbb{K}^{n,m}$ che si ottiene scambiando in A le righe con le colonne.

Es. $A = \begin{pmatrix}1&4&0\\2&-7&9\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}1&2\\4&-7\\0&9\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,2}$

N.B. $(A^t)^t = A$ (INVOLUZIONE)

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$(AB)^t = ?$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p} \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{m,p} \Rightarrow (AB)^t \in \mathbb{K}^{p,m}$

$A^t \in \mathbb{K}^{n,m}$, $B^t \in \mathbb{K}^{p,n} \Rightarrow B^t A^t \in \mathbb{K}^{p,m}$

Infatti $(AB)^t = B^t A^t$

Def. Una matrice quadrata A si dice

- **SIMMETRICA** se $A = A^t$ esempio $A = \begin{pmatrix}1&0&3\\0&5&2\\3&2&4\end{pmatrix}$
- **ANTISIMMETRICA** se $A = -A^t$ esempio $A = \begin{pmatrix}0&2&3\\-2&0&4\\-3&-4&0\end{pmatrix}$