$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. $AB = \emptyset \;\cancel{\Rightarrow}\; A = \emptyset$ o $B = \emptyset$

Oss. Perché il prodotto tra matrici è definito in questo modo?

FUNZIONE LINEARE

$f: A \to B$ $\quad M_1$ matrice di f $(m \times n)$

$g: B \to C$ $\quad M_2$ matrice di g $(n \times p)$

$\underbrace{g \circ f}_{g(f(x))\ x \in A} : A \to C$ $\quad M_1 M_2$ matrice di $g \circ f$ $(m \times p)$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad f(x) = x \cdot M_1$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad g(x) = x \cdot M_2$

$$g(f(x)) = \underbrace{\underbrace{x \cdot M_1}_{\in \mathbb{R}^{1,n}} \cdot M_2}_{\in \mathbb{R}^{1,p}}$$

$x \in \mathbb{R}^m \; (\in \mathbb{R}^{1,m})$

Def. Data $A=(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice **TRASPOSTA** di A la matrice $A^t \in \mathbb{K}^{n,m}$ che si ottiene scambiando in A le righe con le colonne.

Es. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,2}$

N.B. $(A^t)^t = A$ (INVOLUZIONE)

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$(AB)^t = ?$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p} \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{m,p} \Rightarrow (AB)^t \in \mathbb{K}^{p,m}$

$A^t \in \mathbb{K}^{n,m}$, $B^t \in \mathbb{K}^{p,n} \Rightarrow B^t A^t \in \mathbb{K}^{p,m}$

Infatti $(AB)^t = B^t A^t$

Def. Una matrice quadrata A si dice

- **SIMMETRICA** se $A = A^t$ $\xrightarrow{\text{esempio}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
- **ANTISIMMETRICA** se $A = -A^t$ $\xrightarrow{\text{esempio}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

IL DETERMINANTE

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chiamiamo DETERMINANTE di A indicato con $\det(A)$ o $|A|$ l'elemento di $\mathbb{K}$ definito ricorsivamente nel seguente modo

- se $n=1$, cioè $A=(a_{11}) \in M_1(\mathbb{K})$, $\det(A)=a_{11}$
- se $n>1$, definiamo per ogni coppia di indici (i,j) con $i,j=1,\dots,n$ il COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} come lo scalare

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna.
Definiamo il determinante come:

$$\det A = a_{11}\Gamma_{11} + a_{12}\Gamma_{12} + \dots + a_{1n}\Gamma_{1n}$$

NB. Il determinante si calcola solo se la matrice è quadrata!!!

DETERMINANTE MATRICI 2x2

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$$

$$\det(A) = e_{11} T_{11} + e_{12} T_{12}$$

$$T_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = + \det(e_{22}) = e_{22}$$

$$T_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = - \det(e_{21}) = -e_{21}$$

$$\det(A) = \underline{e_{11} e_{22}} - \underline{e_{12} e_{21}}$$

ESEMPI

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 6 = 8 + 6 = 14$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \cdot 8 - (-2)(-4) = 8 - 8 = 0$$

DETERMINANTE MATRICI 3x3

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$$

$$\det A = e_{11} T_{11} + e_{12} T_{12} + e_{13} T_{13}$$

$$| e_{22} \quad e_{23} |$$

$$\Gamma_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}$$

$$\Gamma_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} e_{21} & e_{23} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} = -e_{21}e_{33} + e_{23}e_{31}$$

$$\Gamma_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} e_{21} & e_{22} \\ e_{31} & e_{32} \end{vmatrix} = e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31}$$

$$\det(A) = e_{11}e_{22}e_{33} - e_{11}e_{23}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} + e_{12}e_{23}e_{31}$$
$$+ e_{13}e_{21}e_{32} - e_{13}e_{22}e_{31}$$

$$= \underline{a_{11}e_{22}e_{33}} + \underline{e_{12}e_{23}e_{31}} + \underline{e_{13}e_{21}e_{32}}$$
$$- \left(\underline{e_{13}e_{22}e_{31}} + \underline{e_{23}e_{32}e_{11}} + \underline{e_{33}e_{21}e_{12}} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

REGOLA DI SARRUS

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{21} & e_{22} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{31} & e_{32} \end{array}\right)$$

$|A| =$ + (prodotti delle diagonali) − (prodotti delle diagonali secondarie)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) REGOLA DI SARRUS

$$\det(A) = |A| = 8 + 0 + 6 - (-8 + 6 + 0) = 16$$

2) COMPLEMENTI ALGEBRICI

$= 0,\ a_{12} = 0$

$$\det(A) = |A| = a_{11}\Gamma_{11} + \cancel{a_{12}\Gamma_{12}} + a_{13}\Gamma_{13}$$

$$\Gamma_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Gamma_{13} = (-1)^{1+3}\det(A_{13}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 7$$

$$\det(A) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 7 = 16$$

DETERMINANTE MATRICI $n \times n$, $n \geq 4$

IL TEOREMA DI LAPLACE

Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ il suo determinante è dato della somma degli elementi di una riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

- RISPETTO ALLA i-esima riga:

$$\det(A) = a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \dots + a_{in}\Gamma_{in}$$

- RISPETTO ALLA j-esima colonna:

$$\det(A) = a_{1j}\Gamma_{1j} + a_{2j}\Gamma_{2j} + \dots + a_{nj}\Gamma_{nj}$$

N.B. Conviene scegliere la riga o la colonna con il maggior numero di zeri!!

N.B. Se ho una riga o colonna con tutti zeri

$\Rightarrow \det(A) = 0$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 11 \cdot (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 11 \cdot (-3) \cdot (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 11 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det(2) = 11 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2$$

$$= 11 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 2$$

$$= 330$$

OSS. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice TRIANGOLARE SUPERIORE o INFERIORE allora $\det(A)$ è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

1) $\det(I_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & 1 \end{pmatrix} = 1$

2) $\det(A) = \det(A^t)$

3) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ TEOREMA DI BINET

4) Se una riga (colonna) è proporzionale ad un'altra riga (colonna) $\Rightarrow \det(A)=0$

5) Se una riga (colonna) è somma o differenza di altre due righe (colonne) $\Rightarrow \det(A)=0$

ESEMPI

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 18 \end{pmatrix}$ $\quad C_2 = -3C_1 \Rightarrow \det(A)=0$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad R_3 = R_1 - R_2 \Rightarrow \det(B)=0$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C) = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$= (-1) \cdot (-16) = 16$

4) $D = A \cdot C \quad \det(D) = \underbrace{\det(A)}_{0} \cdot \underbrace{\det(C)}_{16} = 0$

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

$A \in M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow B \in M_n(\mathbb{K})$

T1) scambiare 2 righe (colonne) di $A \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

T2) sommare ad una riga (o colonna) di A il prodotto di un'altra riga (o colonna) di A per uno scalare

$\Rightarrow \det(B) = \det(A)$

T3) moltiplicare una riga (o colonna) di A per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \det(B) = \lambda \det(A)$ <u>MULTILINEARITÀ</u>

<u>Oss.</u> $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B = kA$ dove $k \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow \det(B) = k^n \det(A)$. (Applico n volte T3).

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} B = \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad C_3 - C_2 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(A) = \det(B) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{= -2+1}$$

$$= 1 \cdot (-1) = -1$$

Ex. Calcolare $\det(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} A' \begin{array}{c} \quad\quad\quad C_3 - C_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(A) = \det(A') = (-1) \cdot (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_1 - C_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1) \cdot (3) \cdot (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot (3 - 21)$$

$$= -3 \cdot (-18) = 54$$

II TEOREMA DI LAPLACE

Sia $A \in M_n(K)$. La somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (colonna) vale zero.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Elementi R1: $(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (0, 1, -5)$

Complementi algebrici R3: $\Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}$

$$\Rightarrow \quad a_{11}\Gamma_{31} + a_{12}\Gamma_{32} + a_{13}\Gamma_{33} = 0$$

$$\cancel{0\,\Gamma_{31}} + \Gamma_{32} - 5\Gamma_{33} = 0$$

$$\Gamma_{32} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -10 \qquad \Gamma_{33} = (-1)^6 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Gamma_{32} - 5\Gamma_{33} = -10 - 5(-2) = 0 \quad \blacksquare$$

MATRICI INVERTIBILI

Def: Una matrice quadrata è detta NON SINGOLARE se il suo determinante è diverso da zero, altrimenti è detta SINGOLARE.

Def. Una matrice quadrata è detta INVERTIBILE quando esiste una matrice B tale che:

$$AB = BA = I_n$$

$B = A^{-1}$ INVERSA DI A

Thm: Una matrice è INVERTIBILE se e solo se è NON SINGOLARE

Def: Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice AGGIUNTA di A la matrice A_a ottenuta da A sostituendo ogni suo elemento con il proprio complemento algebrico.

Thm: Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t A_a$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-1-3) = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\Gamma_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Gamma_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Gamma_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \qquad \Gamma_{21} = -\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Gamma_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Gamma_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Gamma_{31} = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 \qquad \Gamma_{32} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \qquad \Gamma_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_a^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/8 & 1/2 & 1/8 \end{pmatrix}$$

VERIFICARE CHE $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & a^3 & 3 \\ 2 & 1 & a+4 \end{pmatrix}$$

INVERTIBILE $\iff \det(A) \neq 0$

CON SARRUS

$$\det(A) = a^3(a+4) + 6 + \cancel{3} - 6a^3 - \cancel{3} - (a+4)$$

$$= a^3(a+4) - 6a^3 - a + 2$$

RUFFINI 2 VOLTE

$$= a^4 - 2a^3 - a + 2 = (a-1)(a-2)(a^2+a+1)$$

CON OPERAZIONI + LAPLACE

$$A \xrightarrow[\det(A)=\det(A')]{R_1 - R_2} A' \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1-a^3 & 0 \\ 1 & a^3 & 3 \\ 2 & 1 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = (1-a^3)\,(-1)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$= (a^3-1)\,(a+4-6) = (a^3-1)(a-2)$$

$$= (a-1)\,\underbrace{(a+a^2+1)}_{>0\ \forall a\in\mathbb{R}}\,(a-2) \neq 0$$

$$\boxed{a \neq 1, 2}$$

A INVERTIBILE $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$

Esercizi

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2+a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a\,(-1)^4 \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}$$

$$= a\,(-2-a-2) = -a\,(a+4)$$

$\det(A) \neq 0$ per $a \neq 0, -4$

2) $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & a \\ a+1 & -1 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$

$$C_3 = C_1 + C_2$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = 0$$

$\nexists a \in \mathbb{R}$

MAI INVERTIBILE

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 & a \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a-1 & a-1 \\ 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} C_2 - C_1 & C_4 - C_1 \end{array}$$

$$\det(A) = \det(B) = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & e-1 & e-1 \\ e-1 & 2 & -1 \\ -1 & e+1 & e-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & e-1 & e-1 \\ e-1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{R_3 - R_1} = 2(-1)^5 \det\begin{pmatrix} -1 & e-1 \\ e-1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\left(+1 - (e-1)^2\right) = 2(e-1)^2 - 1$$

$$= 2(e-2)e$$

$\det(A) \neq 0 \iff e \neq 0, 2$

A è INVERTIBILE $\forall e \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$