Il TEOREMA DI LAPLACE

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. La somma ei prodotti degli elementi di una sua riga (colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (colonna) vale zero.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} T_{jk} = 0 \qquad \forall i \neq j \qquad \text{(RIGHE)}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} T_{kj} = 0 \qquad \forall i \neq j \qquad \text{(COLONNE)}$$

DIM. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $i=1$ e $j=2$ ed operiamo per righe.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} T_{2k} = 0$$

$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ dove $R_k \in \mathbb{R}^{1,n}$. Costruiamo $B = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

Chiaramente $\det(B) = 0$ (prima e seconda riga uguali). Ora calcoliamo $\det(B)$ usando LAPLACE sulla seconda riga.

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} T_{2k}$$
$$= 0$$

Ex. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_{11} T_{21} + a_{12} T_{22} = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (1) \cdot 1 = -3 + 3 = 0$

SPAZI VETTORIALI

Def. Sia $V \neq \emptyset$ un insieme e $\mathbb{K}$ un campo. V è SPAZIO VETTORIALE sul campo $\mathbb{K}$ se

1) $(V, +)$ GRUPPO ABELIANO (ASSOCIATIVITÀ, EL. NEUTRO, ELEMENTO INVERSO, COMMUTATIVITÀ)

2) $\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \\ (\alpha, v) \longrightarrow \alpha \cdot v \end{cases}$

SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

SOMMA IN $\mathbb{K}$ — SOMMA DEL GRUPPO $(V,+)$

a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V : \quad (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall v, w \in V : \quad \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V : \quad (\alpha \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

PRODOTTO IN $\mathbb{K}$ — PRODOTTO NELLO SP. VETTORIALE

EL. NEUTRO PRODOTTO IN $\mathbb{K}$

d) $\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$

$\Rightarrow$ SI UTILIZZA LA NOTAZIONE $V(\mathbb{K})$

PROP. $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

SOMMA

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

PRODOTTO PER UNO SCALARE $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

PROP. $\mathbb{R}^{m,n}$ **È SPAZIO VETTORIALE SU** $\mathbb{R}$

Infatti:

- $(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è GRUPPO ABELIANO
  1) ASSOCIATIVA: $(A+B)+C = A+(B+C)$
  2) EL. NEUTRO: $A + \Phi = \Phi + A = A$
  3) $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ ESISTE L'OPPOSTO $-A = (-a_{ij})$
  4) COMMUTATIVA: $A + B = B + A$

- $\cdot \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n} \\ (\alpha, A) \longrightarrow \alpha \cdot A \end{cases}$
  1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
  2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
  3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (\alpha \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
  4) $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad 1 \cdot A = A$ OSS: $1 \neq I_n$ $1 \in \mathbb{R}$ $I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\Rightarrow$ **$\mathbb{R}^{m,n}(\mathbb{R})$ SPAZIO VETTORIALE DELLE MATRICI**

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def: Si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE di uno spazio V un sottoinsieme $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$, che soddisfa le condizioni di SPAZIO VETTORIALE

1° CRITERIO: Sia $U \neq \emptyset$ un sottoinsieme di $V(\mathbb{K})$. U è SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $V(\mathbb{K})$ se e solo se:

1) $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$ CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in U : \alpha u \in U$ CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO PER UNO SCALARE

2° CRITERIO: Sia $U \neq \emptyset$ un sottoinsieme di uno sp. vettoriale $V(\mathbb{K})$. U è SOTTOSPAZIO DI $V(\mathbb{K})$ se e solo se:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U : \quad \alpha u_1 + \beta u_2 \in U$$

CHIUSO RISPETTO A COMBINAZIONI LINEARI

N.B. Condizione necessaria affinché $U \leq V$ sia sottospazio è $0 \in U$

ESERCIZIO

Si dica quale dei seguenti insiemi è un sott. vettoriale:

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x + y = 1 \right\}$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A \quad \Rightarrow \quad A \not\leq M_2(\mathbb{R})$$

NON È SOTTOSPAZIO

2) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x,y \in \mathbb{R} \right\}$

$0 \in B$

2° CRITERIO: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall B_1, B_2 \in B \quad \alpha B_1 + \beta B_2 \in B$?

$$\alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha x_1 & \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta x_2 & \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} \in B$$

$\Rightarrow B \leq M_2(\mathbb{R})$

3) $C = \{ (x, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \}$

$0 \in C \quad (x=0)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in C \quad \alpha u + \beta v \in C$?

$u = (x, x, -x) \quad v = (y, y, -y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$\alpha u + \beta v = \alpha (x, x, -x) + \beta (y, y, -y) = (\alpha x, \alpha x, -\alpha x) + (\beta y, \beta y, -\beta y)$$

$$= (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y, -(\alpha x + \beta y)) \in C$$

$\Rightarrow C \leq \mathbb{R}^3$

4) $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z \}$

$\underline{0} \in D$

2° CRITERIO $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall u_1, u_2 \in D$ $\alpha u_1 + \beta u_2 \in D$?

$u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $x_1 = y_1 + z_1$
$= (y_1 + z_1, y_1, z_1)$

$u_2 = (y_2 + z_2, y_2, z_2)$

$$\alpha(y_1 + z_1, y_1, z_1) + \beta(y_2 + z_2, y_2, z_2)$$
$$= (\underbrace{\alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2)}_{y' + z'}, \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{y'}, \underbrace{\alpha z_1 + \beta z_2}_{z'}) \in D$$

$\Rightarrow D \leq \mathbb{R}^3$

5) $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 = y \}$

$0 \in E$

2° CRITERIO $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u_1, u_2 \in E$

$u_1 = (x_1, y_1)$, $y_1 = x_1^2$ $u_2 = (x_2, x_2^2)$
$u_1 = (x_1, x_1^2)$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{x'}, \underbrace{\alpha x_1^2 + \beta x_2^2}_{\neq (x')^2})$$

$\Rightarrow u_1 + u_2 \notin E \Rightarrow E \nleq \mathbb{R}^2$

$(x')^2 = (\alpha x_1 + \beta x_2)^2$
$= \alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2 + 2\alpha\beta x_1 x_2$

$u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,4) \in E$

$u_1 + u_2 = (3,5) \notin E$ $3^2 \neq 5$

N.B. L'intersezione di 2 sottospazi è sottospazio.
L'unione di 2 sottospazi, in generale non è sottospazio.

ESEMPIO $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$A \leq \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$
$B \leq \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$

MA $A \cup B$ NON È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

$u_1 = (1,0) \in A \cup B$, $u_2 = (0,1) \in A \cup B$

$u_1 + u_2 = (1,1) \notin A \cup B$

COMBINAZIONE LINEARE

Def: Dati $v_1, v_2, \dots, v_m \in V(\mathbb{K})$ diremo che v è COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, v_2, \dots, v_m$ se esistono $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ tali che:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$ SONO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE

ESERCIZIO In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Determinare se possibile una combinazione lineare dei vettori di $A = \{v_1 = (0,1,-1), v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,2,0)\}$ che dia $v = (0,2,-2)$

$$(0,2,-2) = \alpha(0,1,-1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,2,0)$$
$$= (0,\alpha,-\alpha) + (\beta,\beta,\beta) + (\gamma,2\gamma,0)$$
$$= (\beta+\gamma, \alpha+\beta+2\gamma, -\alpha+\beta)$$

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+2\gamma=2 \\ -\alpha+\beta=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\beta \\ \beta+2+\beta-2\beta=2 \quad \forall \\ \alpha=\beta+2 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma=-\beta \\ \alpha=\beta+2 \end{cases} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ CI SONO INFINITE COMB. LINEARI DEI VETTORI DI $\star$ CHE DANNO σ.

Ad esempio $\alpha=2$ $\beta=0$ $\gamma=0$

$$(0,2,-2) = 2(0,1,-1) + 0(1,1,1) + 0(1,2,0)$$

$\alpha=1$ $\beta=-1$ $\gamma=1$

$$(0,2,-2) = 1(0,1,-1) - 1(1,1,1) + 1(1,2,0)$$

ESERCIZIO

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che dice $D=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ se $d_{11} \neq 0$ IMPOSSIBILE!

$$x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C = D \qquad x,y,z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x+2y \\ 2y-z & -3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x+2y=3 \\ 2y-z=1 \\ -3x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2y \Rightarrow x=1 \\ z=2y-1 \Rightarrow z=1 \\ -9+6y-y=-4 \\ 5y=5 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$\boxed{D = A + B + C}$$

INSIEMI LIBERI E LEGATI

Def. Sia $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V(\mathbb{K})$. A si dice **LIBERO** e i suoi vettori si dicono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** se e' unica comb. lineare dei vettori di A che da il vettore nullo ($\underline{0}$) è quella e coefficienti tutti nulli

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

In caso contrario A si dice **LEGATO** e i suoi vettori **LINEARMENTE DIPENDENTI**.

ESEMPIO

$$A = \{v_1 = (1,2),\ v_2 = (0,3),\ v_3 = (2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$$

A è LIBERO o LEGATO?

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$(\alpha, 2\alpha) + (0, 3\beta) + (2\gamma, \gamma) = (\alpha + 2\gamma,\ 2\alpha + 3\beta + \gamma)$$
$$= (0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ -4\gamma + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 1, 1) \qquad \boxed{-2v_1 + v_2 + v_3 = 0}$$

TEOREMA Un insieme A è legato se e solo se almeno uno dei suoi vettori si può esprimere come comb. lineare dei rimanenti.

ESERCIZI

1) $S = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

$M_3 = -2M_1 \Rightarrow$ S È LEGATO!

$2M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3 = 0$

2) $S = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

M_1 e M_2 NON SONO PROPORZIONALI $\Rightarrow$ S LIBERO!

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

COPERTURA LINEARE

Def. Dato $A \subseteq V(\mathbb{K})$, $A \neq \emptyset$, si dice CHIUSURA o COPERTURA LINEARE di A l'insieme $\mathcal{L}(A)$ di tutti i vettori di $V(\mathbb{K})$ che si possono ottenere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A.

$$\mathcal{L}(A) = \{ v \in V(\mathbb{K}) \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \quad a_i \in \mathbb{K},\ v_i \in A \}$$

$A \subseteq \mathcal{L}(A)$

$\mathcal{L}(A) \leq V(\mathbb{K})$ SOTTOSPAZIO (PIÙ PICCOLO CHE CONTIENE A)

ESERCIZI

1) $A = \{ (1,1,0), (2,1,0), (1,0,1) \} \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(A) = \{ \alpha(1,1,0) + \beta(2,1,0) + \gamma(1,0,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (\alpha, \alpha, 0) + (2\beta, \beta, 0) + (\gamma, 0, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (\alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

2) $B = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 2 & n+1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{R} \right\}$

B è sottoinsieme infinito, $\emptyset \notin B$

$B \nsubseteq M_2(\mathbb{R})$

PRENDO n elementi di B $\begin{pmatrix} k_i & 0 \\ 2 & k_i+1 \end{pmatrix}$ $i=1,\dots,n$

$$\mathcal{L}(B) = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 2 & k_1+1 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} k_n & 0 \\ 2 & k_n+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a_i k_i & 0 \\ 2a_i & a_i k_i + a_i \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i, k_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i k_i & 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} a_i & \sum_{i=1}^{n} a_i k_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i, k_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$k' = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i \in \mathbb{R}$ $\qquad h = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$\mathcal{L}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} k' & 0 \\ 2h & k'+h \end{pmatrix} \;\middle|\; k', h \in \mathbb{R} \right\}$$

3) $A = \{ (1, x, x+3) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \}$ insieme infinito

$$\mathcal{L}(A) = \{ (y, x, x+3y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$A = \{ x(0,1,1) + (1,0,3) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{L}(A) = \{ x(0,1,1) + y(1,0,3) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (y, x, x+3y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

4) Def $A = \{v_1, v_2\}$ $B = \{v_1, v_2, v_1+v_2\}$
dimostrare che $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$

$\mathcal{L}(A)$: $\alpha v_1 + \beta v_2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(B)$: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma(v_1+v_2)$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{(\alpha+\gamma)}_{\alpha'} v_1 + \underbrace{(\beta+\gamma)}_{\beta'} v_2 \Rightarrow \alpha' v_1 + \beta' v_2$$

$\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$

ESERCIZIO

1) $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^n$ con n finito, $M_2(\mathbb{R})$ è chiusura lineare di qualche insieme finito?

$$\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}(\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\})$$

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

2) $S = \{(a+b, a+c, a+b, a+c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$$= \{(a,a,a,a) + (b,0,b,0) + (0,c,0,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(1,1,1,1) + b(1,0,1,0) + c(0,1,0,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}(\{(1,1,1,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)\})$$

$$= \mathcal{L}(\{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\})$$

3) $S = \{(a, 2a+b, b-1) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$$= \{a(1,2,0) + b(0,1,1) + (0,0,-1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

$S \not\leq \mathbb{R}^3$ NON È SCRIVIBILE COME COPERTURA LINEARE!

SISTEMA DI GENERATORI

Def. Dato $A \subseteq V(\mathbb{K})$, $A \neq \phi$, A è SISTEMA DI GENERATORI di $V(\mathbb{K})$ se $\mathcal{L}(A) = V(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A.

$V(\mathbb{K})$ È GENERATO DA A

ESERCIZIO

Stabilire se i seguenti insiemi generano $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

1) $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

Il generico elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è generato da A?

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}?$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = x - y \\ \beta = y - z \\ \alpha = z \end{cases}$$

N.B. Per generare $\mathbb{R}^n$ servono almeno n vettori. Ciò non significa che n o più vettori generano sempre $\mathbb{R}^n$!

Per generare $\mathbb{R}^{m,n}$ servono almeno $m \cdot n$ matrici

N.B. $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ genera $\mathbb{R}^n$

dove $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,\dots,0,1)$

$B = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\}$ genera $\mathbb{R}^{m,n}$

dove $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$\dots$, $E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

TEOREMA Ogni spazio vettoriale finitamente generato e non banale ($\neq \emptyset$) ammette almeno un sistema libero di generatori.

ESERCIZIO

Insieme LIBERO DI GENERATORI di

$U = \{(a+4b+9c, 2a+2c, b+2c, -a+b+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$
$\subseteq \mathbb{R}^4$

$U = \{a(1,2,0,-1) + b(4,0,1,1) + c(9,2,2,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$= \mathcal{L}(\{\underbrace{(1,2,0,-1), (4,0,1,1), (9,2,2,1)}_{\text{SISTEMA DI GENERATORI}}\})$

È LIBERO?

$$\alpha(1,2,0,-1) + \beta(4,0,1,1) + \gamma(9,2,2,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad ?$$

$$(\alpha, 2\alpha, 0, -\alpha) + (4\beta, 0, \beta, \beta) + (9\gamma, 2\gamma, 2\gamma, \gamma) =$$

$$(\alpha + 4\beta + 9\gamma,\ 2\alpha + 2\gamma,\ \beta + 2\gamma,\ -\alpha + \beta + \gamma) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\gamma - 8\gamma + 9\gamma = 0 \\ \alpha = -\gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases}$$

scelgo $\gamma = -1 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$$(9,2,2,1) = \overset{\alpha}{1} \cdot (1,2,0,-1) + \overset{\beta}{2} \cdot (4,0,1,1)$$

$$U = \mathcal{L}\Big(\underbrace{\{ (1,2,0,-1),\ (4,0,1,1) \}}_{\text{LIBERO}} \Big)$$