BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Def. Una BASE di uno spazio vettoriale è una SEQUENZA LIBERA DI GENERATORI.

↳ CONTA L'ORDINE!

ESEMPIO Determinare una base per i seguenti spazi vettoriali

1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x = y = z + t \right\}$

↳ $\begin{cases} y = x \\ z = x - t \end{cases}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x-t & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mid x, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L}\left(\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\substack{\text{SISTEMA GENERATORI LIBERO} \\ \text{DUE MATRICI NON PROPORZIONALI}}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

B_1 e B_2 SONO BASI PER A $\qquad$ $B_1 \neq B_2$

2) $A = \{(a+b, 0, a+c, b-c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$$A = \{a(1,0,1,0) + b(1,0,0,1) + c(0,0,1,-1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \mathcal{L}(\underbrace{\{\overset{v_1}{(1,0,1,0)}, \overset{v_2}{(1,0,0,1)}, \overset{v_3}{(0,0,1,-1)}\}}_{\text{SISTEMA DI GENERATORI}})$$

È LIBERO?

$v_3 = v_1 - v_2 \Rightarrow$ È LEGATO RIMUOVO v_3

$$A = \mathcal{L}(\underbrace{\{(1,0,1,0), (1,0,0,1)\}}_{\text{LIBERO VETTORI NON PROPORZIONALI}})$$

Def. Dato $V(\mathbb{K})$ si dice che ha DIMENSIONE n, $\dim V = n$, se una sua qualsiasi base ha cardinalità (numero di vettori) uguale ad n.

$\Rightarrow V_n(\mathbb{K})$

N.B. $V = \{\underline{0}\}$ NON HA BASE. Per convenzione $\dim V = 0$

ESEMPI

1) $V(K) = \mathbb{R}^n(\mathbb{R})$

$B_c = \left(e_1=(1,0,\dots,0) \ , e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots, e_n=(0,\dots,0,1) \right)$

$\uparrow$
base canonica

$\dim \mathbb{R}^n(\mathbb{R}) = n$

2) $V(K) = \mathbb{R}^{m,n}(\mathbb{R})$

Sia E_{ij} la matrice con $e_{ij}=1$ e gli altri $=0$

$B_c = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn})$ base canonica o standard

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

N.B. Sia $\dim V(K) = n$ $(V_n(K))$

1) n è il max numero di vettori linearmente indipendenti in $V(K)$

2) n è il numero minimo di vettori che servono per generare $V(K)$

3) ogni sequenza di n generatori di V è libera $\Rightarrow$ è base

4) ogni sequenza libera di n vettori di V è un insieme di generatori $\Rightarrow$ è base

(useremo questa!)

ESERCIZI In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

1) $A=\{(1,2,-9)\}$ genera $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$?

$|A|=1<3=\dim \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \Rightarrow$ No!

2) $C=\{(1,1,0),(0,0,1),(2,4,3)\}$ È LIBERO?

$|C|=\dim \mathbb{R}^3(\mathbb{R})=3$

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(2,4,3)=(0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha=\beta=\gamma=0 \ ?$$

$$\begin{cases} \alpha+2\gamma=0 \\ \alpha+4\gamma=0 \\ \beta+3\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

LIBERO

$|C|=3 \Rightarrow$ C è BASE

Def. Sia $B=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ una base di uno sp. vettoriale $V_n(\mathbb{K})$. $\forall v\in V$ si dicono componenti di v rispetto a B i coefficienti $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{K}$

$$v=a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n$$

Fissata B di $V_n(\mathbb{K})$

$$\phi_B: V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n$$

$$\phi_B(v)=a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n$$

è una biiezione perché ogni vettore $v \in V_n(K)$ si può scrivere in modo unico come comb. lineare dei vettori di base ⇒ le sue componenti sono univocamente determinate

ESERCIZIO Data la base di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

$$B=\big((1,1,0),(1,-1,0),(2,1,3)\big)$$

determinare le componenti di $w_1=(1,-1,0)$

$w_2=(2,0,0)$

$w_3=(7,8,9)$

$$w_1=\alpha(1,1,0)+\beta(1,-1,0)+\gamma(2,1,3)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\alpha,\alpha,0)+(\beta,-\beta,0)+(2\gamma,\gamma,3\gamma)=(1,-1,0)$$

$$w_1 \rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=1\\ \alpha-\beta+\gamma=-1\\ 3\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-\beta=-1\\ \gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\\ \gamma=0\end{cases}$$

$$w_2 \rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=2\\ \alpha-\beta+\gamma=0\\ 3\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha=2\\ \alpha=\beta\\ \gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\\ \gamma=0\end{cases}$$

$$w_3 \rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=7\\ \alpha-\beta+\gamma=8\\ 3\gamma=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-\beta=5\\ \gamma=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-2\\ \gamma=3\end{cases}$$

$\phi_B(w_1)=(0,1,0)$ $\phi_B(w_2)=(1,1,0)$ $\phi_B(w_3)=(3,-2,3)$

IL RANGO DI UNA MATRICE

Def.

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice **MINORE DI ORDINE p** una matrice quadrata di ordine p ottenuta da A sopprimendo m-p righe e n-p colonne.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,2} \Rightarrow p \leq 2$$

- MINORI DI ORDINE 2 SONO: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- MINORI DI ORDINE 1 sono gli elementi di A.

Def. Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ diciamo che A ha **RANGO** p, $r(A) = rk(A) = \rho(A) = p$, se esiste un minore di A di ordine p non singolare e tutti i minori di A di ordine maggiore a p $(p+1, \dots)$ sono singolari.

$$p \leq \min\{m, n\}$$

ESERCIZIO CALCOLARE IL RANGO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & -7 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \rho(A) \leq 4$$

ORDINE 2

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(M_1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

ORDINE 3

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(M_2) = 4 - 9 - 1 = -6 \neq 0$$

$$\rho(A) \geq 3$$

Se $\det(M_2) = 0$ devo considerare gli altri minori 3x3.

- $3 \leq \rho(A) \leq 4$ ora considero minori 4x4

$$M_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \begin{matrix} C_4 = C_4 + 2C_3 \\ C_1 = C_1 + 3C_3 \end{matrix} \qquad \qquad \downarrow \begin{matrix} C_1 = C_1 + C_3 \\ C_4 = C_4 + 2C_3 \end{matrix}$$

$$M_3' = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -22 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix} \qquad M_4' = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -22 & 5 & -7 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_3') = (-1)(-1) \det \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -22 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -12 & 5 & -6 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(M_4') = (-1) \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 10 & -2 & 10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -22 & 5 & -17 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ -12 & -32 \end{pmatrix} = 0$$

N.B.

M_3 e M_4 non sono gli unici minori di ordine 4 di A. Però posso affermare che $\rho(A)=3$ senza controllare gli altri.

TEOREMA DEGLI ORLATI

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha rango p se e solo se esiste un minore M di ordine p non singolare e tutti i minori di A di ordine $p+1$ contenenti M sono singolari.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le \rho(A) \le 4$$

$$M_1 = (1) \qquad \det(M_1) \neq 0$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(M_2) \neq 0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(M_3) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(M_4) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

ORLATO 4x4 $\Rightarrow$ $$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1-R_4}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_3-C_1}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = -12+12=0$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(A)=3$$

QUANTI SONO I MINORI DI ORDINE p in una matrice $\mathbb{K}^{m,n}$.

$$\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{p} \approx (mn)^p$$

dove $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ è il coefficiente binomiale!

FISSATO UN MINORE DI ORDINE p QUANTI SONO I SUOI ORLATI DI ORDINE $p+1$?

$$(m-p)(n-p) \approx mn$$

ESERCIZIO Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il rango

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{R_1=R_3}$ $\det(M_1)=0$ $\quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{R_1=R_3}$ $\det(M_2)=0$

$$\rho(A)=2$$

2) $A = \begin{pmatrix} k+3 & k \\ k+3 & \boxed{1} \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $\qquad 1 \le \rho(A) \le 2$

$M_1 = \begin{pmatrix} k+3 & k \\ k+3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(M_1) = k+3 - k(k+3)$

$= (k+3)(1-k) = 0$

$k = -3, 1$

$M_2 = \begin{pmatrix} k+3 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k(k+3)$

$= 0 \qquad k = 0, -3$

INTERSEZIONE DELLE CONDIZIONI $\Rightarrow$ ENTRAMBI I MINORI HANNO DET. $= 0$ $\quad k = -3$

$\Rightarrow k = -3 \quad \rho(A) = 1$

$k \neq -3 \quad \rho(A) = 2$

N.B.

Il rango di una matrice A è il MASSIMO NUMERO DI RIGHE (O COLONNE) LINEARMENTE INDIPENDENTI.

ESERCIZIO

Stabilire se i seguenti insiemi sono liberi o legati.

1) $S_1 = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \le M_2(\mathbb{R})$

$\mathbb{K}^{m,n} \simeq \mathbb{K}^{m \cdot n}$ $\qquad \mathbb{R}^{2,2} \simeq \mathbb{R}^4$ (SROTOLO PER RIGHE O COLONNE)

↑ ISOMORFO

S_1 È LIBERO $\iff$ $\rho\begin{pmatrix}2&2&0\\1&1&0\\3&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}$ $R_1=2R_2$ $R_3=R_4$ $= 3$

$$= \rho\begin{pmatrix}1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} = 2 \neq 3$$

<u>S_1 È LEGATO</u>

$$M_1 = M_2 + 3M_3$$

2) $S_2 = \{(1,2,3), (2,1,1), (9,-6,-13)\} \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

$$\rho\begin{pmatrix}1&2&9\\2&1&-6\\3&1&-13\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}1&2&9\\0&-3&-24\\0&-5&-40\end{pmatrix} \begin{matrix}R_2-2R_1\\R_3-3R_1\end{matrix}$$

$$= 1 + \rho\begin{pmatrix}-3&-24\\-5&-40\end{pmatrix}\begin{matrix}/3\\/5\end{matrix} = 1 + \rho\begin{pmatrix}1&8\\1&8\end{pmatrix} = 2$$

<u>S_2 È LEGATO</u>

3) $S_3 = \left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\k&k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k&-1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

$$A = \begin{pmatrix}1&-1&0&k\\2&1&0&-1\\0&0&k&0\\1&0&k&0\end{pmatrix}$$

S_3 È LIBERO $\iff$ $\rho(A)=4$

$\det(A)\neq 0$

$$\det(A) = k\det\begin{pmatrix}1&-1&k\\2&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix}-1&k\\1&-1\end{pmatrix} = k(1-k) \neq 0$$

$k \neq 0, 1$

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ stabilire per quali $k\in\mathbb{R}$ il vettore $v=(1+k,3,3)$ appartiene alla chiusura lineare di $S=\{(1,2,3),(k,0,0),(0,1,k)\}$

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1+k \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & k & 3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \qquad \underbrace{}_{B}$$

$v\in\mathcal{L}(S) \iff v$ è combinazione lineare dei vettori di S

$\iff B$ è combinazione lineare delle colonne di A

$\iff$ max. numero di colonne l.i. di A = max. numero di colonne l.i di $A|B$

$\iff \rho(A)=\rho(A|B)$

$k(-2k+3)=0$

$-2k^2+3k=0$

N.B. $\rho(A|B)\geq\rho(A)$

$$\rho(A)=\rho\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -2k & 1 \\ 0 & -3k & k \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1 \end{matrix} = 1+\rho\begin{pmatrix} -2k & 1 \\ -3k & k \end{pmatrix}$$

$$=1+\rho\begin{pmatrix} -2k & 1 \\ -3k+2k^2 & 0 \end{pmatrix}=2+\rho\begin{pmatrix} 2k^2-3k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 3 & k \neq 0, \frac{3}{2} \\ 2 & k = 0, \frac{3}{2} \end{cases}$$

$k=0$

$$p(A|B) = p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 3 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_4 = C_1 + C_3$ $\qquad$ $R_3 = 3R_1$

$$= p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{2}$$

$k = \frac{3}{2}$

$$p(A|B) = p\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & | & \frac{5}{2} \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_1) = -\frac{3}{2} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 0 \qquad \det(M_2) = \frac{3}{2} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$p(A|B) = 3$

<u>QUINDI</u>

- $k \neq 0, \frac{3}{2}$ $\quad p(A) = p(A|B) = 3$
- $k = 0$ $\quad p(A) = p(A|B) = 2$
- $k = \frac{3}{2}$ $\quad p(A) = 2 \neq 3 = p(A|B)$

$\forall k \neq \frac{3}{2} \quad r \in d(S)$

ESERCIZIO

Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} k & k \\ k & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k-1 \\ 0 & k+2 \end{pmatrix} \right\}$

per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ k & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(S)$?

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & k \\ k & -1 & k-1 & 4 \\ k-1 & 0 & k+2 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} A & B \end{matrix}$$

$$\rho(A) = \rho(A|B)$$

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k & -1 & k-1 \\ k-1 & 0 & k+2 \end{pmatrix} = -k(k+2)$$

$$\rho(A) = \begin{cases} 3 & k \neq 0, -2 \\ 2 & k = 0, 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A|B) = (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k & 0 & k \\ k-1 & k+2 & 2 \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} 0 & k \\ k+2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -k^2(k+2)$$

$k=0$

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$k=-2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1+\rho\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}=\boxed{3}$$

$$\rho(A|B)=\begin{cases} 4 & h\neq 0,-2 \\ 3 & h=-2 \\ 2 & h=0 \end{cases}$$

$$\boxed{h=0}\Rightarrow \rho(A)=\rho(A|B)$$

INTERSEZIONE E SOMMA DI SOTTOSPAZI

Siano $U, W \leq V(K)$ $\quad U \cap W \leq V(K)$

$U \cup W \nleq V(K)$

Def.

Dati U e $W \leq V(K)$ si dice **SOMMA** di U e W:

$$U+W=\{v=U+w \mid v\in U \text{ e } w\in W\}\leq V(K)$$

Il sottospazio $U+W$ è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$.

LA SOMMA SI DICE DIRETTA $\Leftrightarrow$ $U \cap W=\{\underline{0}\}$ vettore nullo el. neutro di $(V,+)$

$U+W=V$

FORMULA DI GRASSMAN $U, W \leq V(K)$

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

U e W SONO IN SOMMA DIRETTA $\Leftrightarrow$ $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)$

$=\dim(V)$