SISTEMI LINEARI

Def. Un sistema lineare è un insieme di m equazioni lineari ed n incognite.

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad a_{ij}, b_n \in \mathbb{R}$$

a_{ij} = coefficienti delle incognite
b_n = termini noti

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ MATRICE INCOMPLETA (SOLO COEFF. INCOGNITE)

$$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ MATRICE COLONNA DELLE INCOGNITE

$$B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ MATRICE COLONNA DEI TERMINI NOTI

$$A|B_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ MATRICE COMPLETA

Utilizzando il prodotto righe per colonne il SISTEMA LINEARE $(*)$ diventa:

$$AX = B$$ FORMA MATRICIALE

Def. Una soluzione del sistema è una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di elementi di $\mathbb{K}$ che risolve tutte le equazioni del sistema.
Un SISTEMA LINEARE si dice COMPATIBILE se ammette almeno una SOLUZIONE.

TEOREMA ROUCHÉ - CAPELLI

Un sistema lineare $AX=B$ è COMPATIBILE $\Leftrightarrow rk(A)=rk(A|B)$
Numero soluzioni $\infty^{n-rk(A)}$ dove $n-rk(A)$ è il numero di var. libere.

Def. Un sistema lineare si dice OMOGENEO se $B=\emptyset$

$$AX=\emptyset$$

OSS. Ogni sistema lineare OMOGENEO AMMETTE LA SOLUZIONE NULLA $(0,0,\dots,0)$ che viene detta SOLUZIONE BANALE

Le soluzioni non banali sono dette AUTOSOLUZIONI.

Se il sistema NON è OMOGENEO $\Rightarrow AX \neq \emptyset \Rightarrow (0,0,\dots,0)$ NON è SOLUZIONE.

TEOREMA DI CRAMER

Sia $AX=B$ un sistema lineare con $\det(A)\neq 0$
allora il SISTEMA AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE.
Tale soluzione è $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i = \dfrac{\det(B_i)}{\det(A)}$
dove B_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo l'i-esima colonna con B.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$

Il sistema è OMOGENEO quindi ammette soluzione BANALE.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

- Se $\det(A)\neq 0 \xRightarrow{\text{CRAMER}}$ SOLUZIONE UNICA (QUELLA BANALE).
- Se $\det(A)=0 \xRightarrow{\text{R.C.}}$ AMMETTE AUTOSOLUZIONI

$\det(A)=0 \Rightarrow \exists$ AUTOSOLUZIONI $\qquad \underbrace{\rho(A)=2=\rho(A|B)}$ SIST. COMPATIBILE

$\Rightarrow$ IL NUMERO DI RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI DI A SONO 2

$\Rightarrow$ DELLE 3 EQ. PRESENTI SOLO 2 SONO NECESSARIE

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

le eq. che scelgo sono quelle "intercettate" dal minore di ordine 2 cioè $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$n = 3$ (numero delle incognite / numero delle colonne di A)

$\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

NUMERO SOLUZIONI $\infty^{3-2} = \infty^{1}$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y=2z \\ y=-2z \end{cases}$$

$S = \{ (2z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$

INSIEME DELLE SOLUZIONI

PERCHÉ SISTEMA È OMOGENEO

COLLEGAMENTO CON LE APPLICAZIONI LINEARI

Sia $x \in \mathbb{K}^{n,1}$ definisco

$$f(x) = A\underset{\in \mathbb{K}^{n,1}}{x} \quad \text{dove } A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

osservo che $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è UNA APPLICAZIONE LINEARE.

$$\underset{= n}{\dim(\mathbb{K}^n)} = \underbrace{\dim \ker(f)}_{\mathrm{Null}(f)} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(f)}_{\mathrm{rk}(f)}$$

$\ker(f) = \{ x : Ax = 0 \}$

$\operatorname{Im}(f) = \{ y : \exists x \; f(x) = y \} = \{ Ax : x \in \mathbb{R}^{n,1} \}$

$$A = [\, C_1 \;\; C_2 \; \dots \; C_n \,] \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

C_1 ← COLONNE DELLA MATRICE

$$A x = \underbrace{x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n}_{\text{COMBINAZIONE LIN. DELLE COLONNE}}$$

$$\dim \operatorname{Im}(f) = rk(A)$$ = MASSIMO NUMERO DI COLONNE DI A LIN. INDIPENDENTI.

$$n = \operatorname{Null}(f) + rk(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Null}(f) = n - rk(A)$$

NUMERO DI SOLUZIONI ROUCHÉ-CAPELLI

ESERCIZIO Ci determino se esistono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ y + z = 1 \\ 3x + y + 5z = 7 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

(columns A | B)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2-3) \neq 0 \qquad \rho(A) = 3$$

$$\det(A|B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A|B) = (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rho(A|B) = 3$$

$\rho(A) = \rho(A|B)$ SIST. COMPATIBILE

$\infty^{n-rk(A)}$ SOLUZIONI $\Rightarrow$ ∞^{0} $\Rightarrow$ UNICA SOLUZIONE

$$\begin{cases} 2y+3z=2 \\ x+y+2z=3 \\ y+z=1 \end{cases}$$

POSSO UTILIZZARE CRAMER O PER SOSTITUZIONE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2(1-z)+3z=2 \\ x+1-z+2z=3 \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2z+3z=2 \\ x+z=2 \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

soluzioni

$$\{(2,1,0)\}$$

$$\det(A)=1$$

CRAMER

$$X=(x_1,x_2,x_3) = (2,1,0)$$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{(2+\cancel{4}+\cancel{9}-\cancel{3}-\cancel{4}-\cancel{6})}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-(2-3)}{1} = 1$$

$$x_3 = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = 0$$

OSS. Il metodo di Cramer è sempre utilizzabile per sistemi compatibili, a patto di isolare le incognite principali da quelle che fungeranno come parametri.

ESERCIZIO

$$\begin{cases} x+y+5z=4 \\ x-y+z=0 \\ 2x-y+4z=2 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$C_4 = C_3 - C_1$

$\det(A) = -4+2-5+10+1-4=0$

$\rho(A)=2=\rho(A|B)$ SIST. COMPATIBILE $\infty^{3-2}=\infty^{1}$ sol.

(1 VARIABILE LIBERA).

$$\begin{cases} x+y+5z=4 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \boxed{4-5z} \\ x-y = \boxed{-z} \end{cases}$$

termini noti

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A)\neq 0$

$B=\begin{pmatrix} 4-5z \\ -z \end{pmatrix}$

$$x=\frac{\det\begin{pmatrix} 4-5z & 1 \\ -z & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{5z-4+z}{-2} = \frac{6z-4}{-2}$$

$$y=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 4-5z \\ 1 & -z \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-z+5z-4}{-2} = \frac{4z-4}{-2}$$

$S=\left\{\left(\frac{6z-4}{-2}, \frac{4z-4}{-2}, z\right) \mid z\in\mathbb{R}\right\}$

$=\{(2-3z, 2-2z, z)\}$

$=(2,2,0)+\mathcal{L}((-3,-2,1))$

$\not\leq \mathbb{R}^3$

$\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}((2,2,0),(-3,-2,1))$ $\dim \mathcal{L}(S)=2$

OSS.

Lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare compatibile omogeneo è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Se il sistema non è omogeneo non è sottospazio ma è della forma

$$S = w + V_A$$

SOLUZIONE PARTICOLARE DEL SISTEMA

SPAZIO VETTORIALE DATO DALL'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI

$$AX = 0$$

SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

DIM.

1) Insieme delle soluzioni x tali che $Ax=0$ formano sottospazio vettoriale

$$\Updownarrow$$

$\forall x_1, x_2$ soluzioni del sistema e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \underbrace{A x_1}_{=0} + \beta \underbrace{A x_2}_{=0}$$

$$= 0$$

poiché soluzioni

$$\Downarrow$$

$\alpha x_1 + \beta x_2 \in S$ (insieme delle soluzioni)

$$\Downarrow$$

$$S \leq \mathbb{K}^n$$

2) Sia $v \neq 0$ soluzione di $Av = B$ con $B \neq \Phi$.

$\forall x_1, x_2$ soluzioni di $Ax = 0$ (sistema omogeneo associato)

$\forall \alpha, \beta$

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2 + v) = \alpha \underbrace{A x_1}_{=0} + \beta \underbrace{A x_2}_{=0} + \underbrace{Av}_{=B}$$

$$= B$$

$\alpha x_1 + \beta x_2 + v \in S$ (insieme delle soluzioni)

Sia y soluzione $Ay = B$, $y = v + y'$

$$Ay = A(v + y') = \underbrace{Av}_{=B} + Ay' = B$$

$\boxed{Ay' = 0} \rightarrow y'$ soluzione del sistema omogeneo

ESERCIZIO

Date le matrici $A = \begin{pmatrix} k-2 & 1 \\ 0 & k+1 \\ k-2 & -k \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} k-1 \\ k+1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si trovi

1) quando $AX = B$ è compatibile e quante soluzioni ammette

2) l'insieme delle soluzioni per $k = -1$

3) l'insieme delle soluzioni per $k = 1$

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 \\ 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k-2)(k+1)$$

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 \\ k-2 & -k \end{vmatrix} = -k(k-2)-(k-2) = (k-2)(-k-1) = -(k-2)(k+1)$$

$k=2,-1 \quad \rho(A)=1$

$k\neq 2,-1 \quad \rho(A)=2$

$$\det(A|B) = \det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ k-2 & -k & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1+k & k+1 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ k-2 & -k & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (k-2)(-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} k+1 & k+1 \\ k+1 & k+1 \end{pmatrix} = 0$$

$\rho(A) = \rho(A|B)$

$k=2,-1 \quad \infty^{2-1}$ soluzioni

$k\neq 2,-1 \quad \infty^{0}$ soluzioni $\Rightarrow$ sol. unica

2) $k=-1 \quad \infty^1$ soluzioni

$$\begin{cases} -3x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-2 \end{cases}$$

$$S=\{(x,3x-2)\} = \underbrace{(0,-2)}_{\text{SOL. PARTICOLARE}} + \underbrace{\mathcal{L}((1,3))}_{\text{SOL. SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO}}$$

3) $k=1$ unica soluzione

$$\begin{cases} -x+y=0 \Rightarrow x=1 \\ 2y=2 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$S=\{(1,1)\}$

ESERCIZIO

Discutere il sistema $AX=B$ dove:

$$A=\begin{pmatrix} 1-k & 1 & \boxed{1} \\ 2 & 2-k & 2 \\ 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -3 \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posto $k=4$ si determini l'insieme delle soluzioni.

$$1 \le \rho(A) \le 3 \qquad M_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-k & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2=\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \qquad M_4=\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$\det(M_1)=2-(2-k)=k$$
$$\det(M_2)=2(1-k)-2=-2k$$
$$\det(M_3)=1-k-1=-k$$
$$\det(M_4)=(1-k)^2-1=(1-k-1)(1-k+1)=-k(2-k)$$

$$k=0 \Rightarrow \rho(A)=1$$

$k\neq 0$

$$\det(A)=\det\begin{array}{c} C_1-C_3 \\ \begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 0 & 2-k & 2 \\ k & 1 & 1-k \end{pmatrix} \end{array}=\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-k \\ 0 & 2-k & 2 \\ k & 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$=k\det\begin{pmatrix} 2 & 2-k \\ 2-k & 2 \end{pmatrix}=k\left(4-(2-k)^2\right)$$

$$= k\,(2-(2-k))\,(2+(2-k)) = -k^2(k-4)$$

$$\rho(A) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2 & k=4 \\ 3 & k\neq 0,4 \end{cases}$$

$k \neq 0,4$ $\quad \underset{\text{PERCHÉ RANGO MASSIMO}}{\rho(A)=3} \Rightarrow \rho(A|B)=3$

$k=0$

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -3 \\ 2 & 2 & 2 & | & -2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$k=4$

$$\rho\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & | & -3 \\ 2 & -2 & 2 & | & 2 \\ 1 & 1 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$k \neq 0 \quad \rho(A) = \rho(A|B)$

$k = 0 \quad \rho(A) \neq \rho(A|B)$

Posto $\boxed{k=4}$ $\Rightarrow \infty^{n-\rho(A)} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni (dipendono da 1 parametro)

$\rho(A)=2$ (2 eq. sufficienti)

$$\begin{cases} -3x+y+z=-3 \\ 2x-2y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y+z=-3 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix}\begin{cases} -2x+2z=-2 \\ -4x+2y=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=x-1 \\ y=2x-2 \end{cases}$$

$$S=\{(\overset{x}{x}, \overset{y}{2x-2}, \overset{z}{x-1}) \mid x\in\mathbb{R}\} = \underbrace{(0,-2,-1)}_{\text{SOL. PARTICOLARE}} + \mathcal{L}((1,2,1))$$

CON CRAMER

Pongo $z=\alpha$ e rendo il sistema quadrato.

$$\begin{cases} -3x+y=-3-\alpha \\ 2x-2y=2-2\alpha \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3-\alpha \\ 2-2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=6-2=4$$

$$x=\frac{\det\begin{pmatrix} -3-\alpha & 1 \\ 2-2\alpha & -2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{6+2\alpha-2+2\alpha}{4} = \frac{4+4\alpha}{4} = 1+\alpha$$

$$y=\frac{\det\begin{pmatrix} -3 & -3-\alpha \\ 2 & 2-2\alpha \end{pmatrix}}{4} = \frac{-\cancel{6}+6\alpha+\cancel{6}+2\alpha}{4} = \frac{\cancel{8}\alpha}{\cancel{4}} = 2\alpha$$

$$S=\{(1+\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} = (1,0,0)+\mathcal{L}((1,2,1))$$

$$=(1,0,0)+(-1)\cdot(1,2,1)+\mathcal{L}((1,2,1)) = (0,-2,-1)+\mathcal{L}((1,2,1))$$

$$\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}((1,0,0),(1,2,1))$$

$$B_{\mathcal{L}(S)}=((1,0,0),(1,2,1))$$

$$S \nleq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$$

NON È SOTTOSPAZIO PERCHÉ SISTEMA NON OMOGENEO.

ESERCIZIO

Si discuta il sistema $AX=B$

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k-2 & 1 & k-1 & k \\ 0 & k+1 & -k & k+1 & 0 \\ k & -1 & k & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rho\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cancel{k-2} & \cancel{1} & \cancel{k-1} & \cancel{k} \\ 0 & k+1 & -k & k+1 & 0 \\ 0 & -1-k(k-2) & 0 & -(k-1)^2 & -k^2 \end{array}\right) = 1+\rho\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{k+1} & \cancel{-k} & \cancel{k+1} & \cancel{0} \\ -1-k(k-2) & 0 & -(k-1)^2 & -k^2 \end{array}\right)$$

$k\neq 0$

$$= 2+\rho\left(\underbrace{-1-k(k-2)}_{-k^2+1} \quad -(k-1)^2 \quad -k^2\right) = \boxed{3}$$

$$\rho(A)=\begin{cases} 2 & k=1 \\ 3 & k\neq 1 \end{cases} \qquad \rho(A|B)=3 \quad \forall k$$

$k=0$

$$\rho(A|B)=1+\rho\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=2=\rho(A)$$

$\rho(A)=\rho(A|B) \quad \forall k\neq 1$ $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBILE

$k\neq 0,1$ $\quad \infty^{4-3}=\infty^1$ soluzioni

$k=0$ $\quad \infty^{4-2}=\infty^2$ soluzioni

$k=1$ $\quad \nexists$ soluzione

$k=0$

$$\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ y+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-x+2y+t=-x+2y-y=-x+y \\ t=-y \end{cases}$$

$$S=\{(x,y,-x+y,-y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$=\mathcal{L}((1,0,-1,0),(0,1,1,-1))$$

$\mathcal{L}(S)=S \qquad B_{\mathcal{L}(S)}=((1,0,-1,0),(0,1,1,-1))$

TEMI ESAME

1) Si scriva un sistema lineare in 2 equazioni e 3 incognite con ∞^2 soluzioni.

$$\begin{cases} x=0 \\ 3x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases}$$

2) Sistema 3 eq. 3 incognite non compatibile

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

3) Sistema lineare NON di Cramer in 2 incognite con una sola soluzione

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ soluzione $S=\{(0,0)\}$

4) Determinare se esiste una base dell'insieme delle soluzioni

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow S=\{(0,0,0)\}$$

NON AMMETTE BASE

5)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 2x-1+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=1-2x \end{cases}$$

$$S=\{(x,1-x,1-2x)\} = \underbrace{(0,1,1)+\mathcal{L}((1,-1,-2))}$$

NON ESISTE BASE PERCHÉ NON È SOTTOSPAZIO

6) Si scriva un sistema lineare 4 eq. in 4 incognite il cui spazio delle soluzioni sia spazio vettoriale di dim 2.

$$\infty^2 \text{ sol.} \Rightarrow 2 = 4-rk(A) \Rightarrow \boxed{rk(A)=2}$$

siccome S (sp. soluzioni) è sp. vettoriale $\Longrightarrow$ sistema è omogeneo.

$$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\in\mathbb{R}^{4,4} \quad rk(A)=2$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-t \end{cases}$$

$$S=\mathcal{L}((-1,0,1,0),(0,-1,0,1)) \qquad S=\{(-z,-t,z,t)\}$$

7) Descrivere una funzione lineare $f: V_4(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ il cui nucleo abbia dimensione 1.

$Null(f) = \dim \ker(f) = 1$

$$\underbrace{\dim(V_4(\mathbb{R}))}_{=4} = \dim \operatorname{Im}(f) + \underbrace{Null(f)}_{=1}$$

$\dim \operatorname{Im}(f) = 3$

$f(x) = Ax$ dove $A \in \mathbb{R}^{3,4}$

$\ker(f) = \{ Ax = 0 \mid x \in \mathbb{R}^{4,1} \}$

$\dim \operatorname{Im}(f) = rk(A) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3 + x_4)$$

8) Sistema lineare di 4 equazioni in cui $S = \{ (t, 2, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$$= \{ \underbrace{(0,2,0)}_{\text{sol. particolare}} + t \underbrace{(1,0,0)}_{} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

sott. vett. soluzioni sist. lineare omogeneo associato

$$\begin{cases} y = 2 \\ \cancel{z = 0} \end{cases}$$

9) Sistema lineare in cui l'insieme delle soluzioni abbia base $B=((1,1,0),(0,0,1))$.

$\Downarrow$

SIST. OMOGENEO $\Rightarrow$ SIST. COMPATIBILE

$$S = \mathcal{L}(B) = \{x(1,1,0) + z(0,0,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x, x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

SIST.

$$\begin{cases} x = y \end{cases}$$

10) Sia $f: V_4(\mathbb{R}) \to V_4(\mathbb{R})$ funzione lineare.

$\mathrm{rank}(f) = 2$ e $\mathrm{null}(f) = 2$?

$4 = \mathrm{rn}(f) + \mathrm{null}(f) = 2+2$ V $\qquad f(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = Ax = (x_1, x_2, x_1+x_2, x_1-x_2)$$

11) Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + ky + 2t = 0 \\ y + kz + t = 0 \\ x + (k+1)y + kz + (k+3)t = 2-k \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k & k+3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$$

$$rk(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \end{pmatrix} = 1 + rk \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + rk \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = 2 + rk\left(\begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2 + rk(k) = \begin{cases} 3 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$$

$$rk(A|B) = 2 + rk\left(\begin{pmatrix} 0 & k & 2-k \end{pmatrix}\right) = 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$k = 0 \Rightarrow$ NESSUNA soluzione

$k \neq 0 \Rightarrow \infty^1$ soluzioni

12) Per quali $k \in \mathbb{R}$ $A_k X = B_k$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k & k-1 \\ 0 & k & k+2 & k+3 & 3 \\ k & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} k^2-7 \\ 4 \\ k-2 \end{pmatrix}$$

ammette ∞^1 sol.? $\quad \infty^{n-rk(A)} = \infty^{5-rk(A)} \geq \underline{\infty^2 \text{ sol}},$

$rk(A) \leq 3$

$\underline{\nexists\, k \in \mathbb{R}}$

13) $A_k X = B_k$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k & k-1 \\ 0 & k & k+2 & k+3 & 3 \\ k & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ k^2-1 \\ k^2-2k+1 \end{pmatrix}$$

è sottospazio vettoriale.

$\Downarrow$

Se $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{k=1}$ $\quad \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k^2-1=0 \Rightarrow ✓ \\ k^2-2k+1=0 \Rightarrow ✓ \end{cases}$

$k=1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$S = \{x : Ax = 0\}$

$S = \{(0,0,0)\}$

$rk(A_1) = 3$

UNICA SOLUZIONE

NON AMMETTE BASE

14) Si determini se esiste una base, della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$

SIST. NON OMOGENEO

$$\begin{cases} x=3y \\ z=4y-3 \end{cases}$$

TROVO SOL. PARTICOLARE

$(0,0,-3)$

$S = \{(0,0,-3) + y(3,1,4) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$= (0,0,-3) + \mathcal{L}((3,1,4))$

L NON È SOTTOSPAZIO !!

$$d(S) = d((0,0,-3),(3,1,4))$$

$$B_{d(S)} = ((0,0,-3),(3,1,4))$$

15) Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare precisandone il numero di soluzioni.

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = 0 \\ x + (3+k)z = k+3 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 3+k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$rk(A) = rk\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & 3+k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + rk\begin{pmatrix} k & 2 \\ -1 & 3+k \end{pmatrix}$$

$$= 1 + rk\begin{pmatrix} 0 & 2+k(3+k) \\ -1 & 3+k \end{pmatrix}$$

$$= 2 + rk\left(2+k(3+k)\right)$$

$$k^2+3k+2=0$$

$$(k+2)(k+1)=0$$

$$= \begin{cases} 3 & k \neq -1,-2 \\ 2 & k = -1,-2 \end{cases}$$

$k \neq -1,-2 \Rightarrow$ SIST. COMP.

∞^0 soluzioni = unica soluzione

$k = -1,-2$

$$\rho(A|B) = rk\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k+3 & k+3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= rk \begin{pmatrix} 0 & k & 2 & 2 \\ 0 & -1 & k+3 & k+5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 + rk \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ -1 & k+3 & k+5 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + rk \begin{pmatrix} 0 & 2+k(k+3) & 2+k(k+5) \\ -1 & k+3 & k+5 \end{pmatrix}$$

$$= 2 + rk \begin{pmatrix} \underset{k^2+3k+2}{\underbrace{2+k(k+3)}} & \underset{k^2+5k+2}{\underbrace{2+k(k+5)}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{per } k=-1,-2$$

$$= 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$k=-1,-2$ $\quad rk(A) = 2 \neq 3 = rk(A|B)$ NON COMP. NESSUNA SOL.

$k \neq -1,-2$ $\quad rk(A) = rk(A|B) = 3$ UNICA SOLUZIONE

16) In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y+z+t=0 \end{cases}$$

Si determini W tale che $\dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 2$.

SIST. OR. ASSOCIATO

$$(1)-(2) \begin{cases} x-t-1=0 \Rightarrow t = x-1 \\ z = -x-y+1 \end{cases}$$

$$S = \{(x, y, -x-y+1, x-1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(0,0,1,-1) + x(1,0,-1,1) + y(0,1,-1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= (0,0,1,-1) + \underbrace{\mathcal{L}((1,0,-1,1),(0,1,-1,0))}_{\text{SOTTOSPAZIO}}$$

$U = \mathcal{L}((1,0,-1,1),\ (0,1,-1,0))$

W t.c. $\dim W = 3 \Rightarrow |B_W| = 3$ e $\dim(U \cap W) = 2$

$W = \mathcal{L}((1,0,-1,1),\ (0,1,-1,0),\ e_k)$

elemento della base canonica di $\mathbb{R}^4$

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W)$$
$$= 5 - \underset{\displaystyle 3}{\underset{\|}{\dim(U+W)}}$$

$e_k = (0,0,1,0)$

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

17) Si scrive in forma matriciale un sistema in $\mathbb{C}$ in 3 equazioni 2 incognite la cui unica soluzione sia $(0,1)$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{FORMA MATRICIALE}}$$

18) Si scrive in forma matriciale un s.l. su $\mathbb{C}$ in 2 eq. e 3 incognite che ammette ∞^2 sol. tra cui $(0,1,1)$ e $(0,i,i)$.

$$S = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,1)) = \{(x,y,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$(0,1,1) \in S$

$(0,i,i) \in S$

$rk(A) = 1$

$\infty^{n-rk(A)}$ sol.

$\infty^{3-rk(A)=2}$

$$\begin{cases} 2y = 2 \\ y = z \end{cases} \qquad \begin{cases} -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

19) Si scrive in forma matriciale s.l. 2 eq. in 2 incognite le cui soluzioni formano spazio vettoriale di dimensione 1 generato da $(0,i)$.

$$S = \mathcal{L}((0,i)) = \mathcal{L}((0,1))$$

SIST. OMOGENEO

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$