PRODOTTO SCALARE E ORTOGONALITÀ

Def: In $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ e' applicazione:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longrightarrow u \cdot v$$

$$u \cdot v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

$$\boxed{u \cdot v = u\, v^t}$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

SI DICE PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO STANDARD.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ con il PSE si dice spazio vettoriale euclideo reale ($E_n(\mathbb{R})$).

Dato $A \subseteq E_n(\mathbb{R})$ si dice COMPLEMENTO ORTOGONALE di A l'insieme

$$A^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{v \cdot a = 0}_{v \perp a} \ \forall a \in A \}$$
$$\leq \mathbb{R}^n(\mathbb{R})$$

$A^{\perp}$ = insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a tutti i vettori di A.

Un prodotto scalare euclideo è un prodotto scalare positivo non degenere.

FORMA BILINEARE $\quad \phi : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$\forall u_1, u_2 \in V, \ \forall v \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1) $\phi(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha \phi(u_1, v) + \beta \phi(u_2, v)$

$\forall u \in V, \ \forall v_1, v_2 \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

2) $\phi(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \phi(u, v_1) + \beta \phi(u, v_2)$

Se $V = V_n(\mathbb{K})$ dimensione finita allora ϕ può essere rappresentata come una matrice quadrata $n \times n$.
Scelta una Base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$

$$A = (a_{ij}) \Leftrightarrow A_{ij} = \phi(e_i, e_j)$$

Deto $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$

dove $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ componenti di u rispetto a B.

$$w = w_1 e_1 + \dots + w_n e_n$$

$$\phi(u, w) = \phi(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n, w_1 e_1 + \dots + w_n e_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(u_i e_i, w_j e_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} u_i w_i \underbrace{\phi(e_i, e_j)}_{A_{ij}} = (u_1, \dots, u_n) A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ϕ È DEGENERE $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0,$

$\phi(v, w) = 0 \ \forall w \in V$

o

$\exists w \in V, w \neq 0$

$\phi(v, w) = 0 \ \forall v \in V$

ϕ NON DEGENERE $\iff$ $\det(A) \neq 0$ dove ;
A è matrice della
forma bilineare rispetto a B di V.

ϕ È SIMMETRICA $\iff$ $\forall v, w \in V$
$\phi(v,w) = \phi(w,v)$

Def: Dato $V(\mathbb{K})$, si dice prodotto scalare su $V(\mathbb{K})$ una FORMA BILINEARE SIMMETRICA $\phi : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Def: Data ϕ prodotto scalare $u, w \in V(\mathbb{K})$ si dicono ORTOGONALI

$u \perp w \iff \phi(u,w) = 0$

Def: ϕ è definito POSITIVO se $\forall v \in V(\mathbb{R})$
$\phi(v,v) \geq 0$ e $\phi(v,v) = 0 \iff v = 0$

Def: RADICALE di ϕ è l'insieme di tutti i vettori $v \in V$ tali che
$\forall x \in V$ $v \perp x$ ovvero $v \cdot x = 0$

$\text{Rad}(\phi)$ chiaramente $0 \in \text{Rad}(\phi)$

$\text{Rad}(\phi) \leq V$ (sottospazio)

$\text{Rad}(\phi) = \{0\} \iff \phi$ È NON DEGENERE

$\Rightarrow \text{Rad}(\phi) = \text{Ker}(A)$

$= \{ x \in V \mid Ax = 0 \}$

$\dim \text{Rad}(\phi) = n - \text{rn}(A)$

TEOREMA

Se $\phi : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ PRODOTTO SCALARE NON DEGENERE. $\forall X \subseteq V_n(\mathbb{K})$

1) $X^\perp$ è sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$

$X^\perp = \{ y \in V_n(\mathbb{K}) \mid \forall x \in V_n(\mathbb{K}) : x \perp y \}$

2) $\dim X^\perp = n - \dim \mathcal{L}(X)$

3) $X^{\perp} = \mathcal{L}(X)^{\perp}$

4) $X^{\perp\perp} = (X^{\perp})^{\perp} = \mathcal{L}(X)$

5) Della (2) $\mathcal{L}(X) \oplus X^{\perp}$ (somma diretta) $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(X) \cap X^{\perp} = \{0\} \\ \mathcal{L}(X) + X^{\perp} = V_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

ESERCIZIO In $E_3(\mathbb{R})$ determinare

1) $A^{\perp}$ con $A = \{(1,1,-1), (3,1,0)\}$

2) $H^{\perp}$ con $H = \{(\alpha, \beta, \alpha-\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

3) $S^{\perp}$ con $S = \{(p, p+1, 0) \mid p \in \mathbb{R}\}$

1) $A^{\perp} = \mathcal{L}(A)^{\perp}$ $\quad \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}((1,1,-1), (3,1,0))$

$\dim \mathcal{L}(A) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$\dim A^{\perp} = 3 - 2 = 1$

$A^{\perp} = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)\cdot(1,1,-1) = 0,$
$(x,y,z)\cdot(3,1,0) = 0\}$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x+y=x-3x=-2x \\ y=-3x \end{cases}$$

$$A^{\perp}=\{(x,-3x,-2x) \mid x\in\mathbb{R}\}$$
$$=\mathcal{L}((1,-3,-2)) \leq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$$

2) $H^{\perp}=\mathcal{L}(H)^{\perp}$ essendo H s.v.
$H=\mathcal{L}(H)$

$$H=\mathcal{L}((1,0,1),(0,1,-1))$$

$$H^{\perp}=\{(x,y,z) \mid (x,y,z)\cdot(1,0,1)=0,\ (x,y,z)\cdot(0,1,-1)\}$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases}$$

$$H^{\perp}=\{(-z,z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((-1,1,1))$$
$$\leq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$$

* Se un vettore è ortogonale a tutti gli elementi di una base di H allora è ortogonale a tutti gli elementi di H.

$$B_H = ((1,0,1),(0,1,-1))$$

$h \in H \quad h = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,-1)$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Se $v \perp (1,0,1)$ e $v \perp (0,1,-1)$

$v \cdot (1,0,1) = 0 \qquad v \cdot (0,1,-1) = 0$

allora

$$v \cdot h = \alpha \underbrace{v \cdot (1,0,1)}_{=0} + \beta \underbrace{v \cdot (0,1,-1)}_{=0} = 0$$

■

3) $S \not\leq \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \qquad S^\perp = \mathcal{L}(S)^\perp$

$$S = \{ (0,1,0) + p(1,1,0) \mid p \in \mathbb{R} \}$$

$$= (0,1,0) + \mathcal{L}((1,1,0))$$

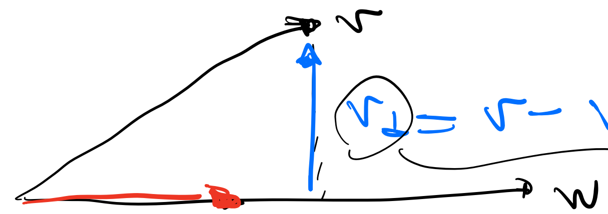
$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}((0,1,0),(1,1,0))$$

$$S^\perp = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)\cdot(0,1,0)=0,\ (x,y,z)\cdot(1,1,0)=0\}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$S^\perp = \{(0,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,0,1))$$

PROIEZIONE DI v LUNGO w



$v_\perp = v - v_\parallel$

$v_\parallel$

vettore proporzionale a w

$$v_\parallel = \frac{v\cdot w}{w\cdot w}\, w$$

prodotto scalare

vettore ortogonale a w $\boxed{w\cdot v_\perp = 0}$

il coefficiente $\frac{v \cdot w}{w \cdot w}$ è detto coefficiente di Fourier di v lungo w.
Mentre $v_{\parallel}$ è detta proiezione ortogonale di v lungo w.

NORMA EUCLIDEA

$$\|v\| = \sqrt{\underbrace{v \cdot v}_{\text{prodotto scalare euclideo}}}$$

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

$\|\cdot\|$ concetto di lunghezza

PROPRIETÀ

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V_n(\mathbb{R})$
$\|v\| \geq 0$

2) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

4) $\forall v, w \in V_n(\mathbb{R})$
$$\underbrace{\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|}_{\text{DIS. TRIANGOLARE}}$$

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con PSE $v=(1,2,1)$ e $w=(2,-1,-1)$.

Determinare

1) la proiezione di v lungo w
2) la componente ortogonale
3) $\|w\|$

coeff. Fourier

1) $$v_{\parallel} = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = -\frac{1}{6} \cdot (2,-1,-1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{v \cdot w}{w \cdot w} = \frac{(1,2,1) \cdot (2,-1,-1)}{(2,-1,-1) \cdot (2,-1,-1)} = \frac{2-2-1}{4+1+1} = \frac{-1}{6}$$

3) $$\|w\|^2 = w \cdot w = 6 \Rightarrow \|w\| = \sqrt{6}$$

2) $$v_{\perp} = v - v_{\parallel} = (1,2,1) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$
$$= \left(4/3, 11/6, 5/6\right)$$

3) $u = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ vettore di norma unitaria avente stesso verso e direzione di w. $\|u\| = 1$

ESERCIZIO GRAM-SCHMIDT

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rendere ortogonale la base $B = ((1,1,0),(1,-1,1),(2,0,0))$.

Processo di $\boxed{\text{Gram-Schmidt}}$ $B = (v_1, v_2, v_3)$

$B' = (v_1', v_2', v_3')$ tale che $v_1' \perp v_2'$ $v_1' \perp v_3'$ $v_2' \perp v_3'$

STEP

1) $v_1' = v_1$

2) $v_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} v_1'$ PROIEZIONE DI v_2 SU v_1'

3) $v_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} v_1' - \frac{v_3 \cdot v_2'}{v_2' \cdot v_2'} v_2'$ PROIEZIONE DI v_3 SU v_2'

PROIEZIONE DI v_3 SU v_1'