3) $u = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ vettore di norma unitaria avente stesso verso e direzione di w. $\underline{\|u\|=1}$

ESERCIZIO GRAM-SCHMIDT

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rendere ortogonale la base $B = ((1,1,0), (1,-1,1), (2,0,0))$.

Processo di $\boxed{\text{Gram - Schmidt}}$ $B = (v_1, v_2, v_3)$

$B' = (v_1', v_2', v_3')$ tale che $v_1' \perp v_2'$ $v_1' \perp v_3'$ $v_2' \perp v_3'$

STEP

1) $v_1' = v_1$

2) $v_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} v_1'$

PROIEZIONE DI v_2 SU v_1'

3) $v_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} v_1' - \frac{v_3 \cdot v_2'}{v_2' \cdot v_2'} v_2'$

PROIEZIONE DI v_3 SU v_2'

PROIEZIONE DI v_3 SU v_1'

1) $v_1' = (1,1,0)$

2) $v_2' = (1,-1,1) - \cancel{\dfrac{\overbrace{(1,-1,1)\cdot(1,1,0)}^{=0}}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}\cdot(1,1,0)}$
$= (1,-1,1)$

3) $v_3' = (2,0,0) - \dfrac{(2,0,0)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}\cdot(1,1,0) - \dfrac{(2,0,0)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}\cdot(1,-1,1)$

$= (2,0,0) - \dfrac{2}{2}(1,1,0) - \dfrac{2}{3}(1,-1,1)$

$= (2,0,0) - (1,1,0) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$B' = \Big(\overset{v_1'}{(1,1,0)}, \overset{v_2'}{(1,-1,1)}, \overset{v_3'}{(1,-1,2)}\Big)$ È BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^3$,

$\underbrace{v_1'\cdot v_2' = 0,\ v_1'\cdot v_3' = 0,\ v_2'\cdot v_3' = 0}_{\text{SODDISFATTE}}$

N.B.

Sia $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una BASE ORTOGONALE di $\mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$.
Allora le componenti di v rispetto alla base B sono date dai coefficienti di fourier $\Rightarrow \boxed{v_i = \dfrac{v\cdot e_i}{e_i\cdot e_i}}$

ESEMPIO

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con PSE si calcolino le componenti di $v = (-2,14,-9,2)$ nella base $B = \big(\underset{e_1}{(1,1,1,0)}, \underset{e_2}{(2,-1,-1,1)},$

$(-1,2,-1,3),\ (-1,-3,4,3))$
$\quad e_3 \qquad\qquad e_4$

$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$

$$\alpha_1 = \frac{v \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} = \frac{(-2,14,-9,2)\cdot(1,1,1,0)}{(1,1,1,0)\cdot(1,1,1,0)} = \frac{-2+14-9}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{v \cdot e_2}{e_2 \cdot e_2} = \frac{(-2,14,-9,2)\cdot(2,-1,-1,1)}{(2,-1,-1,1)\cdot(2,-1,-1,1)} = \frac{-4-14+9+2}{7} = -\frac{7}{7} = -1$$

$$\alpha_3 = \frac{v \cdot e_3}{e_3 \cdot e_3} = \frac{(-2,14,-9,2)\cdot(-1,2,-1,3)}{(-1,2,-1,3)\cdot(-1,2,-1,3)} = \frac{+2+28+9+6}{1+4+1+9} = \frac{45}{15} = 3$$

$$\alpha_4 = \frac{v \cdot e_4}{e_4 \cdot e_4} = \frac{(-2,14,-9,2)\cdot(-1,-3,4,3)}{(-1,-3,4,3)\cdot(-1,-3,4,3)} = \frac{2-42-36+6}{1+9+16+9} = \frac{-70}{35} = -2$$

$v = e_1 - e_2 + 3e_3 - 2e_4$

$\hookrightarrow$ componenti di v rispetto a B sono

$$\underline{(1,-1,3,-2)}$$

N.B. In uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$ con prodotto scalare euclideo (def. positivo) si possono sempre costruire basi ortonormali.

B base qualsiasi di $V_n(\mathbb{K})$ $\longrightarrow$ B' base ortogonale $\longrightarrow$ B'' base ortonormale

ESEMPIO

Dell'esercizio di prima avevamo

$$B = ((1,1,0),(1,-1,0),(2,0,0))$$

$$\downarrow \text{ Gram-Schmidt}$$

$$B' = \left((1,1,0),(1,-1,0),\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)\right)$$

$$B' = (\underset{e_1'}{(1,1,0)},\underset{e_2'}{(1,-1,0)},\underset{e_3'}{(1,-1,2)})$$

$$\downarrow \text{ normalizzazione}$$

$$\|e_1'\| = \sqrt{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \sqrt{2}$$

$$\|e_2'\| = \sqrt{(1,-1,0)\cdot(1,-1,0)} = \sqrt{2}$$

$$\|e_3'\| = \sqrt{(1,-1,2)\cdot(1,-1,2)} = \sqrt{6}$$

$$B'' = \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

BASE ORTONORMALE PER $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ CON PRODOTTO SCALARE EUCL. STANDARD

TEMI ESAME

1) In $V_3(\mathbb{R})$ $(\simeq \mathbb{R}^3)$ dotato di prodotto scalare standard si scrive una base ortonormale diversa dalla canonica.

$$B = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$$

$$B' = \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

non contenente i vettori di B_c

2) In $V_3(\mathbb{R})$ si determini la proiezione ortogonale del vettore $v=(1,-1,1)$ su $w=(0,1,1)$ rispetto al prodotto scalare definito da

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v\cdot w = v A w^t = (1,-1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = +2$$

proiezione ortogonale

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

$$v_{\parallel} = \frac{v\cdot w}{w\cdot w}\, w = \frac{2}{1}\cdot(0,1,1) = (0,2,2)$$

$$w\cdot w = w A w^t = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

3) Si determini una base del complemento ortogonale dell'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}^4$.

$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid \quad\}$

SIST. OMOGENEO

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad rk(A)=rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 + rk\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

∞^2 soluzioni.

$$\begin{cases} \cancel{x_3=x_3} \\ x_1=-x_3 \\ x_2=2x_3 \end{cases}$$

$S=\{(-x_3, 2x_3, x_3, x_4) \mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\} = \mathcal{L}((-1,2,1,0),(0,0,0,1))$

$S=\mathcal{L}(S)$ perché S sottospazio! $\quad S^{\perp}=\{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t)\cdot(-1,2,1,0)=0,\ (x,y,z,t)\cdot(0,0,0,1)=0\}$

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z+2y \\ t=0 \end{cases} \qquad S^{\perp}=\{(z+2y, y, z, 0)\} = \mathcal{L}((1,0,1,0),(2,1,0,0))$$

Osservo che

$$AX=\phi \qquad A=\begin{pmatrix} -R_1- \\ -R_2- \\ \vdots \\ -R_m- \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} R_1\cdot X=0 \\ R_2\cdot X=0 \\ \vdots \\ R_m\cdot X=0 \end{cases}$$

PRODOTTI SCALARI

le righe della matrice A sono ortogonali alle soluzioni del sistema

$\mathcal{R}(A)$ spazio delle righe di A $=\mathcal{L}(R_1,R_2,\dots,R_m)$ allora tutti i vettori in $\mathcal{R}(A)$ sono ortogonali a X.

Si dimostra che $\underset{\text{sistema OMOGENEO}}{S}^{\perp}=\mathcal{R}(A)$

$$B_{S^\perp}=((1,1,-1,0),(1,0,1,0)) \qquad B_S=((-1,2,1,0),(0,0,0,1))$$

4) Si determini complemento ortogonale della copertura lineare dell'insieme.

$$A=\{(2+\alpha,-2,3+\alpha,\alpha+\beta)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

$$A=\{(2,-2,3,0)+\alpha(1,0,1,1)+\beta(0,0,0,1)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}((2,-2,3,0),(1,0,1,1),(0,0,0,1)) \to B_{\mathcal{L}(A)}=(\cdot\ )$$

$$\dim\mathcal{L}(A)=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=1+\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=3$$

$$\begin{cases} 2x-2y+3z=0 \\ x+z=0 \Rightarrow z=-x \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y \\ z=2y \\ t=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(A)^\perp=\{(x,y,z,t)\mid 2x-2y+3z=0,\ x+z+t=0,\ t=0\}$$
$$=\{(-2y,y,2y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((-2,1,2,0))$$

5) In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ sia data la seguente forma bilineare

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = x_1 y_2 - 3 x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Si determini la matrice associata alla f.b. rispetto alla base $B = ((\underset{e_1}{1,0}), (\underset{e_2}{-1,1}))$

$$\left.\begin{aligned} e_1 * e_1 &= (1,0) * (1,0) = 0 \\ e_1 * e_2 &= (1,0) * (-1,1) = 1 \cdot 1 = 1 \\ e_2 * e_1 &= (-1,1) * (1,0) = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3 \\ e_2 * e_2 &= (-1,1) * (-1,1) = \cancel{-1 \cdot 1} - 3 \cdot (-1) + \cancel{1 \cdot 1} = +3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^*_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

N.B.

$$(x_1, x_2) \overset{A^*_B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-3x_2, x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= -3x_2 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_2$$

$$\neq (x_1, x_2) * (y_1, y_2)$$

VETTORI SCRITTI PER COMPONENTI NELLA BASE CANONICA $B_C = ((1,0), (0,1))$

CAMBIAMENTO DI BASE

COMPONENTI RISPETTO A B_C

$$\underbrace{x_1 (1,0) + x_2 (0,1)}_{(x_1, x_2)} = \alpha (1,0) + \beta (-1,1)$$

componenti rispetto a B

$$(x_1, x_2) = \underbrace{(\alpha, 0) + (-\beta, \beta)}_{(\alpha - \beta, \beta)}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - \beta \Rightarrow \alpha = x_1 + \beta = x_1 + x_2 \\ x_2 = \beta \end{cases}$$

Componenti rispetto a B sono $(\alpha, \beta) = (x_1 + x_2, x_2)$

Quindi

$$(x_1+x_2, x_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1+y_2\\ y_2\end{pmatrix} = (-3x_2, \overbrace{x_1+x_2+3x_2}^{x_1+4x_2})\begin{pmatrix}y_1+y_2\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$= -3x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_1y_2 + 4x_2y_2$$

$$= x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1,x_2) * (y_1,y_2)$$

ESERCIZIO Al variare di $k\in\mathbb{R}$ si calcoli la dimensione del complemento ortogonale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del s.e.

$$\begin{cases} x+2y+kz=0 \\ \cancel{x-z=k} \\ 2y+4z=3 \end{cases} \qquad r_k(A)=\begin{cases} 3 & k\neq 3 \\ 2 & k=3 \end{cases}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 3 \end{pmatrix} \qquad r_k(A|B)=3 \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$\det(A) = 2k+2-8 = 2k-6 = 0 \Downarrow k=3 \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -2k-6$$

Sist. compatibile per $\boxed{k\neq 3}$

$$\dim S^{\perp} = \dim \mathcal{L}(S)^{\perp} = 2$$

$$\mathcal{L}(S) = n - r_k(A) + 1 = 3-3+1 = 1$$

$$\mathcal{L}(S)^{\perp} = n - \dim\mathcal{L}(S) = 3-1 = 2$$

$k=3 \quad S=\emptyset$

$\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\} \quad \{0\}^{\perp} = \mathbb{R}^3$

$\dim(\mathcal{L}(S)^{\perp}) = 3$

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dotato di prodotto scalare definito da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcoli il complemento ortogonale di $V = \{(a,b,c) \mid \underbrace{a-b+c=0}_{b=a+c}\}$

$$V = \{(a, a+c, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,0),(0,1,1))$$

$$V^{\perp} = \{(x,y,z) \mid \begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(1,1,0)=0 \\ (x,y,z)\cdot(0,1,1)=0 \end{array}\}$$

$$(x,y,z)\cdot(1,1,0) = \underbrace{(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x+z, 2y+z, x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x+2y+2z$$

$$(x,y,z)\cdot(0,1,1) = (x,y,z)\,A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+z, 2y+z, x+y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x+3y+z$$

$$V^{\perp} = \{(x,y,z) \mid x+2y+2z=0,\ x+3y+z=0\}$$

$$\begin{cases} -3y-z+2y+2z=0 \\ x=-3y-z \end{cases} \Updownarrow \begin{cases} -y+z=0 \Rightarrow z=y \\ x=-4y \end{cases}$$

$$V^{\perp} = \{(-4y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}((-4,1,1))$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. λ è AUTOVALORE di A se $\exists v \in \mathbb{R}^{n,1}$, $v \neq 0$, tale che $Av = \lambda v$
vettore colonna

v viene detto AUTOVETTORE relativo a λ

$Av = \lambda v$ con $v \neq 0 \iff (A - \lambda I)v = 0$ ammette autosoluzione $\iff \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{POLINOMIO CARATTERISTICO}} = 0$ EQ. CARATTERISTICA

$\Rightarrow$ gli AUTOVALORI sono le radici / soluzioni dell'eq. caratteristica.

La MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di un autovalore λ è il numero di volte che λ appare come soluzione dell' eq. caratteristica $\rightarrow m_a(\lambda)$

Sia λ un autovalore di A. Indichiamo con V_λ l'insieme di tutti gli autovettori relativi a λ più il vettore nullo.

$$V_\lambda = \{ v \mid Av = \lambda v \} \leq \mathbb{R}^n$$
$$= \{ v \mid (A - \lambda I)v = 0 \}$$

AUTOSPAZIO RELATIVO A λ

Le MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di un autovalore λ è la dimensione del relativo autospazio $V_\lambda \rightarrow mg(\lambda)$

$$mg(\lambda) = \dim(V_\lambda) = n - rk(A - \lambda I)$$

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$$

λ È REGOLARE $\Leftrightarrow ma(\lambda) = mg(\lambda)$

$\sum ma(\lambda) = n$
$=$
$\sum mg(\lambda)$

<u>ES.</u> Determinare autovalori e autospazi

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EQ. CARATTERISTICA

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+3)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= -(\lambda+3)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-1)(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = -3 \qquad ma(-3) = 1 \Rightarrow mg(-3) = 1$

$\lambda_2 = 1 \qquad ma(1) = 1 \Rightarrow mg(1) = 1$

$\lambda_3 = 3 \qquad ma(3) = 1 \Rightarrow mg(3) = 1$

$\Rightarrow$ tutti gli autovalori sono regolari

Determiniamo gli autospazi:

$\lambda_1 = -3$ $\quad V_{-3} = \{ v \mid (A+3I)v = 0 \}$ $\quad v = (x, y, z)$

$$(A+3I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5y + z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$V_{-3} = \{ (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,0,0))$$

$B_{V_{-3}} = ((1,0,0))$ $\quad mg(-3) = 1$

$\lambda_2 = 1$

$$(A-I)v = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

$$V_1 = \{ (0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((0,1,-1))$$

$B_{V_1} = ((0,1,-1))$ $\quad mg(1) = 1$

$\lambda_3 = 3$

$$(A-3I)v = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x = 0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases}$$

$$V_3 = \{ (0,y,y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((0,1,1))$$

$B_{V_3} = ((0,1,1))$ $\quad m_g(3) = 1$

Def. A e B si dicono SIMILI se esiste una matrice P invertibile tale che

$$A = PBP^{-1}$$

Dimostrare che 2 matrici simili A e B hanno $\det(A) = \det(B)$, $rk(A) = rk(B)$, e stesso pol. caratteristico

Def. A è DIAGONALIZZABILE se è SIMILE ad una matrice diagonale.

$\Downarrow$

$\exists P$ con $\det(P) \neq 0$ tale che $D = P^{-1}AP$

cioè $PD = AP$, dove P è detta

MATRICE DIAGONALIZZANTE