

EXERCISES LESSON 3/12/2025

1) Se una sequenza ha un numero finito di non zero elementi allora la DTFT non può essere zero in un intervallo aperto. (solo zero isolati)

Dato $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ con $|\text{supp}(x)|$ finito. Sufficiente di generalità pensare essere che
 $\text{supp}(x) \subseteq \{0, 1, \dots, L\}$

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n \in \text{supp}(x)} x_n e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^L x_n e^{-j2\pi f n} \\ &= \sum_{n=0}^L x_n u^n \quad \text{dove } u = e^{-j2\pi f} \end{aligned}$$

è nulla
in al più

L radici. $\Rightarrow$ se fosse zero in un intervallo aperto avrebbe ∞ radici.

polinomio di grado
al più L

2) Se una funzione è a banda limitata $\Rightarrow$ il supporto è infinito.

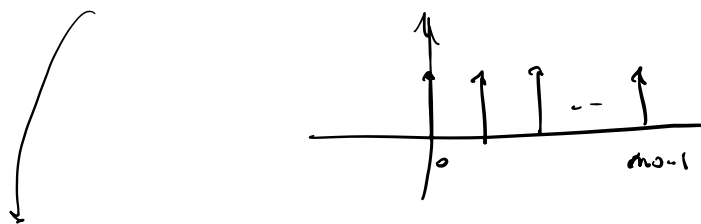
Sia $y(t)$ un'onda a banda 2B e sia x una sua versione campionata

$$x_n = y(nT_c) \quad n \in \mathbb{Z} \quad f_c$$

con $T_c < \frac{1}{2B}$. Se $f_c > 2B \Rightarrow$ la rappresentazione è obbediente al teorema di Nyquist $\Rightarrow x$ ha un numero infinito di elementi non-zero. Il supporto di y deve contenere quello di $x \Rightarrow y$ ha supporto infinito.

3)

$$x_n = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq n_0-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{n=0}^{n_0-1} 1^2 = \boxed{n_0} \Rightarrow \text{come } x \text{ è reale} \\ \text{allora } \mu_f(x) = n_0$$

DTFT di x è:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{n_0-1} \tilde{x}_n e^{-j2\pi f n}$$

$$|X(f)|^2 = X(f) X^*(f) = \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j2\pi f n} \right) \left(\sum_{m=0}^{n_0-1} e^{+j2\pi f m} \right)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{n_0-1} \sum_{n_2=0}^{n_0-1} e^{-j2\pi f(n_1-n_2)} = \sum_{m=-n_0+1}^{n_0-1} (n_0-|m|) e^{-j2\pi f m}$$

$$= \underbrace{n_0}_{m=0} + 2 \sum_{m=1}^{n_0-1} (n_0-m) \cdot \frac{e^{-j2\pi f m} + e^{j2\pi f m}}{2}$$

$\cos(2\pi f m)$

$$= n_0 + 2 \sum_{m=1}^{n_0-1} (n_0-m) \cos(2\pi f m)$$

$$\Delta f = \left(\underbrace{\frac{1}{\|x\|^2}}_{n_0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^2 \overbrace{|x(f)|^2}^{MF(x)} df \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{n_0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^2 \left[n_0 + 2 \sum_{m=1}^{n_0-1} \underbrace{(n_0-m)}_{n_0} \cos(2\pi f m) \right] df \right)^{\frac{1}{2}}$$