

III° LEZIONE DOTTORATO

VARIANZI AL PROBLEMA ORIGINALE

- 1) La condizione di somme distinte è indebita richiedendo che solo le somme di al più $2m$ elementi con $i \in [0, r]$ sono distinte.
- 2) Gli elementi $a_i \in \mathbb{Z}^k$ (requisiti di k interi)
per qualche $m \geq 1$.

FONTE

Sia $\mathcal{F}_{2,m}$ famiglia vettori in cui di $\{1, 2, \dots, m\}$ la cui cardinalità è $\leq m$.

Siamo interessati nel minimo M tale che esiste una sequenza $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ con $a_i \in [0, M]^k$ e che per ogni $S_1, S_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ stesso nell'ipotesi di lato M .

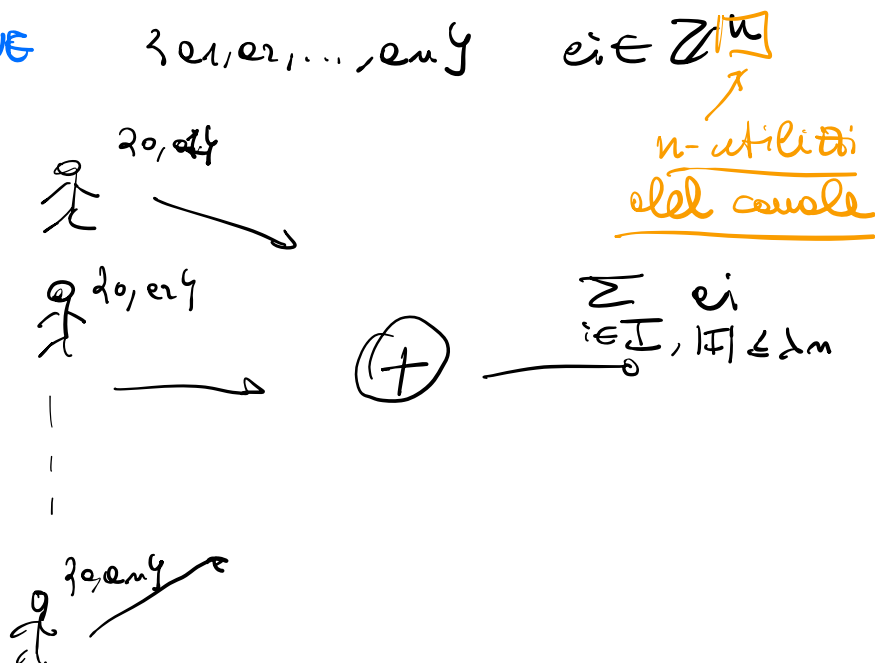
$$\sum_{i \in S_1} a_i \neq \sum_{i \in S_2} a_i$$

sempre
 m vettori sempre
 m vettori

OSS.

$k=1$, $m=1$ ottengono lo stesso problema di Erdős e Moser.

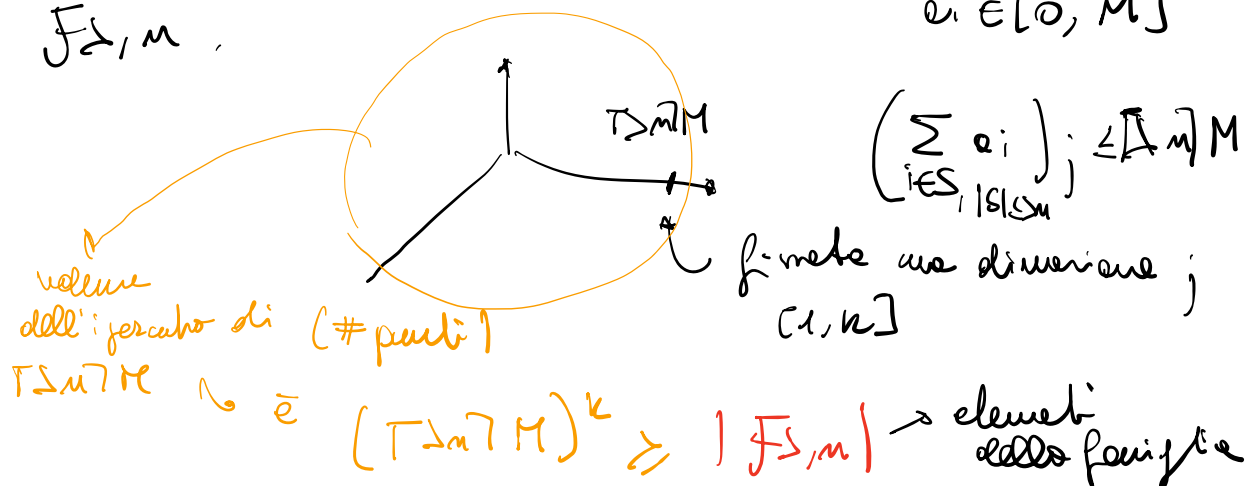
INTERPRETATION



Ogni utente vuole regolare la sua interazione di initiare la comunicazione (senza). Sopra n utilità del canale (più utilità minore sarà il valore di M nella configurazione ottimale)

TRIVIAL BOUND

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ are separate e sono distribuite in $e_i \in [0, M]$



$$M \geq \frac{1}{\sqrt{2m}} |F_{2,m}|^{\frac{1}{2}}$$

VARIANCE BOUND

Let $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ represent $F_{2,m}$ or more precisely
 with $e_i \in [0, m]^k$. For $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$:

$$e_m \geq \sqrt{\frac{4}{\pi(m+2)}} T\left(\frac{m}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}} |F_{2,m}|^{\frac{1}{2}}$$

$T(x)$ is the gamma-function (extension del fattoriale
 ai numeri complessi) $\rightarrow T(m) = (m-1)!$
 $m \in \mathbb{N}$

Proof:

$$X = \sum_{i=1}^m a_i e_i$$

vector

$(e_1, e_2, \dots, e_m)$ uniformly
 distributed over $F_{2,m}$

$$e_i \in \left\{ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\text{Var}[X] = \underbrace{\mathbb{E}[\|X\|_2^2]} - \underbrace{\|\mathbb{E}[X]\|^2}_{\text{sovrapposizione}} \leq \mathbb{E}[\|X\|_2^2]$$

$$\mathbb{E}[\|X\|_2^2] = \mathbb{E}\left[\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|^2\right] \quad \text{sovrapposizione}$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \|e_i a_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} e_i e_j \overset{\substack{\text{product of} \\ \text{scalars}}}{(a_i \cdot a_j)} \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \|a_i\|^2 \|e_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} e_i e_j (e_i \cdot e_j) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \underbrace{\mathbb{E}[\|e_i\|^2]}_{= \frac{1}{4}} \|a_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}[e_i e_j] (e_i \cdot e_j)$$

$$\underbrace{\mathbb{E}[e_i e_j]}_{\substack{\text{non} \\ \text{independent}}} = \mathbb{E}[e_1 e_2] = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)}_{n-2} \frac{\sum_{i=0}^{L_{\text{sum}}-2} \binom{n-2}{i} - 2 \sum_{i=0}^{L_{\text{sum}}-1} \binom{n-2}{i} + \sum_{i=0}^{L_{\text{sum}}} \binom{n-2}{i}}{|F_{2,m}|}$$

$(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$

$\sum n + \frac{1}{2}$

$\geq \frac{1}{2}$

$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-1)! (n-n+1)!} \frac{n-n+1}{n}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n-n+1}{n}$$

$$\mathbb{E}[e_1 e_2] = \frac{1}{4} \frac{\boxed{\binom{n-2}{L_{\text{sum}}} - \binom{n-2}{L_{\text{sum}}-1}}}{|F_{2,m}|}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow \\
& = \frac{1}{4} \frac{\binom{n-2}{\lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor} - \binom{n-2}{\lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor} \frac{\lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor}{n - \lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor + 1}}{|F_{\lambda, n}|} \\
& = \frac{1}{4} \frac{\binom{n-2}{\lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{\lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor}{n - \lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor + 1} \right)}{|F_{\lambda, n}|} \xrightarrow{\text{red}} \frac{1}{2} \\
& = \frac{1}{4} \binom{n-2}{\lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor} \left(\frac{n - \lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor + 1 - \lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor}{n - \lfloor \frac{L\sqrt{n}}{2} \rfloor + 1} \right) < 0
\end{aligned}$$

20

$$\text{Var}[X] \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \leq \frac{1}{4} H^2 n$$

$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^n |e_{ij}|^2 = H^2 n$$

$\leq H$

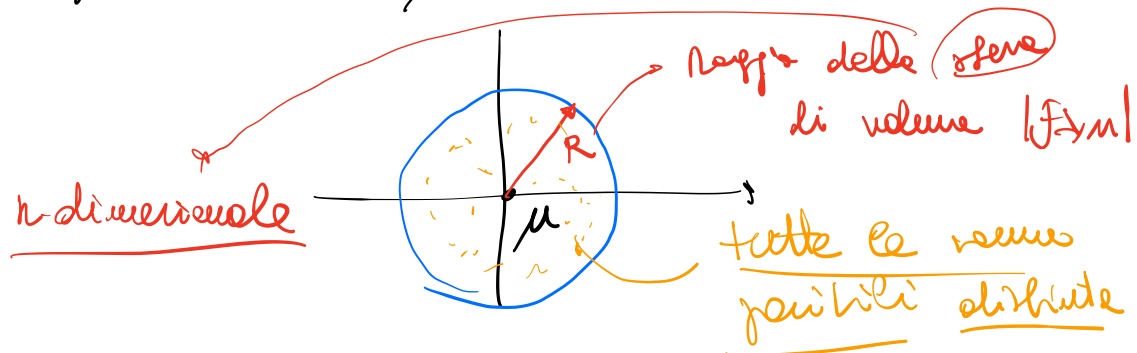
Adesso vogliamo dare un lowerbound a

$$\begin{aligned}
& \text{Var}[X] \downarrow \text{varianza} \\
& = \frac{1}{|F_{\lambda, n}|} \sum_{i=1}^{|F_{\lambda, n}|} \|s_i - \mu\|^2
\end{aligned}$$

$\uparrow$

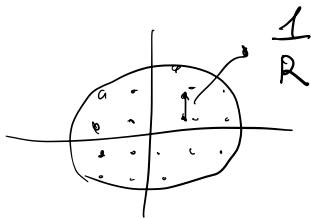
$s_1, s_2, \dots, s_{|F_{\lambda, n}|}$ sono le
punti realizzabili di X

Si dimostra che non possiamo $d = \max_i |s_i - \mu|$
 avere punti con piccole distanze $d' < d$ dove
 rimanere in equilibrio perché altrimenti si sposta un
 s_i più vicino a μ e si rende la cosa minore.



$$R = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}} |F_{S,M}|^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Var}[x] = \frac{1}{|F_{S,M}|} \sum_{|s-\mu| < R} \left\| \frac{s-\mu}{R} \right\|^2 \cdot R^2$$



$$\left| \frac{s}{R} - \frac{\mu}{R} \right| < 1$$

$$= \frac{R^2}{|F_{S,M}|} \sum_{|\tilde{s} - \tilde{\mu}| < 1} \|\tilde{s} - \tilde{\mu}\|^2$$

$$= \frac{R^{2+n}}{|F_{S,M}|} \sum_{|\tilde{s} - \tilde{\mu}| < 1} \|\tilde{s} - \tilde{\mu}\|^2 \cdot \frac{1}{R^n}$$

$$= \underbrace{(1+o(1))}_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{2+n}}{|F_{\lambda, \mu}|} \underbrace{\int_{|x-\tilde{\mu}| \leq 1} \|x-\tilde{\mu}\|^2 dx}_{\text{volume of } (n-1)\text{-dimensional sphere of radius } R}$$

$$d\rho S_{n-1}(\rho) = dV(\rho)$$

$$S_{n-1}(\rho) = \frac{d}{d\rho} V_n(\rho)$$

volume of the
sphere $(n-1)$ -dimensional
of radius ρ

$$S_{n-1}(\rho) = \frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \rho^{n-1}$$

$$\int_0^1 S_{n-1}(\rho) \rho^2 d\rho = \int_0^1 \frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \rho^{n+1} d\rho$$

$$= \frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \left[\frac{\rho^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{n}{n+2} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

↓

$$\frac{1}{n} R^{2+n} \geq \frac{R^{2+n}}{|F_{\lambda, \mu}|} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \frac{n}{n+2} (1+o(1))$$

$$= \frac{R^2}{|F_{\lambda, \mu}|} \cdot \cancel{R^n} \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \frac{n}{n+2}$$

$$\frac{1}{4} R^2 n m \geq R^2 \frac{n}{n+2}$$

$$n \geq \left(4 R^2 \frac{n}{n+2} - \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 R \frac{n}{n+2} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{n}{n+2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} |F_{S,m}|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{4n}{(n+2)\pi}} \Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{4}} |F_{S,m}|^{\frac{1}{4}}$$

Upper Bounds

METHOD POUNDING + COMBINATORIAL NULLSEQUENCE

ENUNCIATO

Sia $\mathbb{F}$ un campo $f = f(x_1, \dots, x_n)$ di polinomi in $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (polinomio multivariato in n variabili e coefficienti in $\mathbb{F}$).

Supponiamo che il grado di f sia $\sum_{i=1}^n t_i$, $t_i \geq 0$, $t_i \in \mathbb{N}$, e supponiamo che i coefficienti del monomio

$$\prod_{i=1}^n x_i^{t_i} \text{ sia diverso da } 0.$$

Allora se $t_1, \dots, t_n$ sono sufficientemente grandi, $|A_i| > t_i$, esistono $e_1, e_2, \dots, e_n \in A$ tali che