

$$\frac{1}{4} R^2 n m \geq R^2 \frac{n}{n+2}$$

$$n \geq \left(4 R^2 \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 R \frac{n}{n+2} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{n}{n+2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} |F_{S,m}|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{4n}{(n+2)\pi}} \Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{4}} |F_{S,m}|^{\frac{1}{n}}$$

TV LEZIONE DEDICATA

Upper Bounds

METODO POUNDING + COMBINATORIAL NULLSEQUENCE

ENUNCIATO

Sia $\mathbb{F}$ un campo $f = f(x_1, \dots, x_n)$ di polinomi in $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (polinomio multivariato in n variabili e coefficienti in $\mathbb{F}$).

Supponiamo che il grado di f sia $\sum_{i=1}^n t_i$, $t_i \geq 0$, $t_i \in \mathbb{N}$, e supponiamo che i coefficienti del monomio

$\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$ non siano da 0.

Allora se $x_1, \dots, x_n$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{F}$, $|A_i| > t_i$ esistono $e_1, e_2, \dots, e_n \in A_n$ tali che

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) \neq 0$$

Più di enunciare il teorema necessitiamo di un lemma.

ENUNCIATIVO

Dato la famiglia di coppie non ordinate

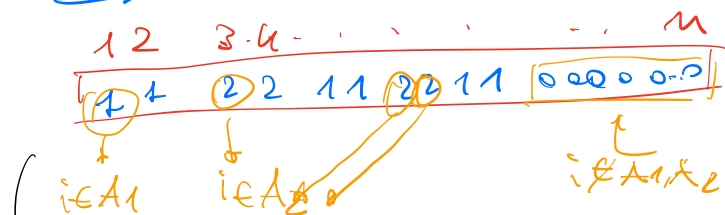
$$\mathcal{M} = \{ (A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq [1, n], |A_1|, |A_2| \leq m, A_1 \cap A_2 = \emptyset \}$$

1° v.p. serve $\exists A_1 \in \mathcal{F}_{m,n}, A_2 \in \mathcal{F}_{m,n}$

$$|\mathcal{M}| \leq |\mathcal{F}_{m,n}|^2 = \left(\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \right)^2 \leq \left(2^{h(\frac{n}{2})} \right)^2 = 2^{2h(\frac{n}{2})}$$

$h(\frac{n}{2}) = -\log_2 \frac{1}{2} - (1-\frac{1}{2}) \log_2 \frac{1}{2}$
 $\log_2 0 = 0$

2° v.p.



$$|A_1|, |A_2| \leq m$$

terminie
parole $\forall$ di lunghezza n tali che 1's al più m e
2's al più m .

$$|\mathcal{M}| = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \binom{n}{i, j, n-i-j} \leq \binom{n}{m}^2 \binom{n}{\leq m, \leq m, 1-2\leq m}$$

$\frac{n!}{i! j! (n-i-j)!}$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$
è una funzione
crescente in $\frac{1}{2}$.

↳ Estimating / estimating the

$$|M| \leq 2^{K(\lambda, \lambda, 1-\lambda)n + o(n)}$$

$$h(\lambda)$$

<

$$\left[\frac{1}{3} < \lambda < \frac{2}{3} \right]$$

done $K(\lambda, \lambda, 1-\lambda)$

$$\begin{aligned} &= -\lambda \log \lambda - \lambda \log \lambda \\ &\quad - (1-\lambda) \log (1-\lambda) \\ &= -2\lambda \log \lambda - (1-\lambda) \log (1-\lambda) \end{aligned}$$

Thm. ($n \geq 1$)

Per $\lambda < \frac{1}{3}$, esiste una sequenza $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dove e_i interi positivi in $[0, K]$ e $F_{\lambda, n}$ -norma distribuita con

$$K \leq 2^{K(\lambda, \lambda, 1-\lambda)n + o(n)}$$

Proof.

Per ogni coppia $(A_1, A_2) \in (F_{\lambda, n})^2$, tale che $A_1 \neq A_2$, definiamo il polinomio in n variabili in $\mathbb{R}$:

$$P_{A_1, A_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{i \in A_1} x_i - \sum_{i \in A_2} x_i$$

polinomio di grado 1 in n variabili

Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ abbiamo delle elisioni quindi possiamo supporre che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$



$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{\substack{A_1, A_2 \in F_{\lambda, n} \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset}} P_{A_1, A_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

polinomio omogeneo

OSS. Se la sequenza $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ è fin-
diversa $\Leftrightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_m) \neq 0$.

OSS.

Si conosce $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ (diverso dal
polinomio nullo).

Quindi $\exists t_1, t_2, \dots, t_n$: il coeff. del monomio
tiso $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$ è diverso da 0.

Sapendo che $f(x_1, \dots, x_m)$ è omogeneo significa $\deg(f) = \sum_{i=1}^m t_i$.

$$\deg(f) = |M| \leq 2^{K(\lambda, \lambda, 1-\lambda)n + o(n)}$$

Quindi per $t_i \leq \deg(f) < M$ allora valdifo
Lemma Nulla

$$\exists (a_1, a_2, \dots, a_m) \mid f(a_1, \dots, a_m) \neq 0$$

$a_i \in [1, M]$

PROBABILISTIC METHOD ALSO FOR $K \gg 1$

Thm. Esiste sequenza $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, n niff.
fonde, tale che $a_i \in [0, K]^n$ che è $F_{\lambda, m}$ -secco distributo con
 $M \leq 2^{K(\lambda, \lambda, 1-\lambda)n + o(n)}$
 $\textcircled{2} \rightarrow$ fino a ora non dip.
da n .

ess.

Condizioni che se A_1, A_2 , $A_1 \neq A_2$, hanno la stessa
somma allora anche $A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$ e $A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$ hanno la
stessa somma.

Quindi una rappresentazione V è in $\mathcal{F}_{S, m}$ se e solo se distribuita $\Leftrightarrow$
 $\sum_{i \in A_1} a_i \neq \sum_{i \in A_2} a_i$ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{S, m}$.

Adesso scegliamo uniformemente e *indipendentemente* caso V le rappresente

$\Sigma = (a_1, \dots, a_n)$ con $a_i \in [1, \pi]^n$ e di

lunghezza n' (il valore lo sceglieremo poi).

$$\Pr(a_1 = x) = \frac{1}{\pi^{n'}}$$

Sia X la variabile casuale

che rappresenta il numero di coppie
di elementi di $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{S, m'}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e la
cui somma

$$\sum_{i \in A_1} a_i = \sum_{i \in A_2} a_i$$

eventi cattivi

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[\left| (A_1, A_2) \mid \textcircled{*} \text{ è verificata} \right| \right]$$

$$= \sum_{(A_1, A_2): A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{S, m'}, A_1 \cap A_2 = \emptyset} \Pr \left(\sum_{i \in A_1} a_i = \sum_{i \in A_2} a_i \right)$$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \sum_{A_1} \bar{e} \text{ indipendente } \sum_{A_2}$
 può ottenere altre
 qui si indipendentemente

$$\Pr\left(\sum_{i \in A_1} e_i = \sum_{i \in A_2} e_i\right) = \sum_{s \in [1, n]^k} \underbrace{\Pr\left(\sum_{i \in A_1} e_i = s\right)}_{\substack{A_1 \neq \emptyset \\ \text{indipendente}}} \cdot \Pr\left(\sum_{i \in A_2} e_i = s\right)$$

$A_1 \neq \emptyset$

$$\Pr\left(\sum_{i \in A_1} e_i = s\right) = \Pr\left(e_{i_1} = s - \sum_{i \in A_1 \setminus \{i_1\}} e_i\right)$$

$\swarrow$ indipendente

$\exists$ el più un e_{i_1} che rende la somma uguale
 $\Pr(\cdot) \leq \frac{1}{n^k}$

$$\Pr(\cdot = \cdot) \leq \sum_{s \in [1, n]^n} \frac{1}{n^n} \Pr\left(\sum_{i \in A_2} e_i = s\right) = \frac{1}{n^k}$$

per questo fatto la sp. di prob.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{(A_1, A_2): A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{\text{ind}}, A_1 \cap A_2 = \emptyset} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{n^n} |\mathcal{H}| < \frac{1}{n^n} 2^{n \binom{k}{2} + o(n)}$$

Supérieur de $\mathbb{E}[X] < \frac{1}{2} 2^{\frac{m'}{n} H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2})} + o(m')$

$\leq t$ (parce que)
 $\uparrow$
entier

Il y a une séquence $(e_1, \dots, e_{m'})$ de éléments $e_i \in [1, n]^k$ car il y a t copies (A_1, A_2) de même la même borne et satisfait la condition.

Si on prend une séquence t éléments de la même manière $m = m' - t$ telle que $\tilde{F}_{S, m}$ est une

$m' = m + t$

Le même problème

$M > \sqrt[n]{\frac{1}{t}} 2^{\frac{m'}{n} H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2})} + o(m')$

$= \sqrt[n]{\frac{1}{t}} \frac{m+t}{2^n} H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}) + o(m)$

$= \sqrt[n]{\frac{1}{t} 2^{t H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2})}} 2^{\frac{m}{n} H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2})} + o(m)$
 $f(t)$

Il y a une séquence de

éléments i, n, t

est une $\forall n \rightarrow f(n)$.

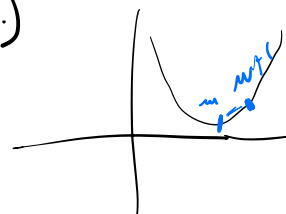
$f(t) = \frac{1}{t} 2^{t H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2})}$

t us minimizate npli interi t . Stiamo cercando il
 più piccolo intero m
 tale

$$f(m+1) \geq f(m)$$

$$\frac{1}{m+1} 2^{(m+1)K(\dots)} \geq \frac{1}{m} 2^{mK(\dots)}$$

$$2^{K(\dots)} \geq \frac{m+1}{m} 1 + \frac{1}{m}$$



$$2^{K(\dots)} - 1 \geq \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad m \geq \left\lceil \frac{1}{2^{K(\dots)} - 1} \right\rceil$$

t_2

↳

$$R \leq \sqrt[n]{\frac{1}{t_2} 2^{t_2 K(\dots, t_2)}} \quad \frac{m}{n} K(\dots, t_2) + o(m)$$