

Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 1

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Convenzioni e notazione (valide per tutti gli esercizi).

- $\text{tri}(t) = 1 - |t|$ per $|t| \leq 1$, altrimenti 0.
- $u(t) = 1$ per $t > 0$, $u(t) = 0$ per $t < 0$ (il valore in $t = 0$ è convenzionale e non influenza i calcoli integrali).
- $\delta(t)$ delta di Dirac con $\int \delta(t - t_0) dt = 1$ e proprietà di campionamento $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$ quando x è regolare in t_0 .
- Segnali di energia (spazio L^2):

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

- Segnali di potenza:

$$\langle x, y \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) dt, \quad \|x\|_T^2 = \langle x, x \rangle_T = P_x.$$

- Segnali periodici di periodo T :

$$\langle x, y \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) dt, \quad \|x\|_T^2 = \langle x, x \rangle_T = P_x.$$

Esercizio 1. Norme e prodotti scalari

Definire

$$x(t) = \text{rect}(t), \quad y(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{3}\right) - \text{rect}\left(t + \frac{1}{3}\right), \quad z(t) = x(t) + y(t).$$

- Disegnare qualitativamente x e y (supporti e livelli).
- Calcolare $\|x\|^2$, $\|y\|^2$ e $\langle x, y \rangle$.
- Dire se x e y sono ortogonali. Se sì, usare Pitagora per $\|z\|^2$.
- (Controllo) Calcolare $\|z\|^2$ anche direttamente integrando $|z(t)|^2$ a tratti.

Svolgimento.

- Supporti: x : $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\text{rect}(t - \frac{1}{3})$: $[-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$. $\text{rect}(t + \frac{1}{3})$: $[-\frac{5}{6}, \frac{1}{6}]$. Quindi $y(t) = -1$ su $[-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}]$, 0 su $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$, $+1$ su $[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$.
- $\|x\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = 1$. Per $\|y\|^2$: porre $r_+(t) = \text{rect}(t - \frac{1}{3})$, $r_-(t) = \text{rect}(t + \frac{1}{3})$, $y = r_+ - r_-$.

$$\|y\|^2 = \|r_+\|^2 + \|r_-\|^2 - 2 \langle r_+, r_- \rangle.$$

$\|r_+\|^2 = \|r_-\|^2 = 1$. L'intersezione dei supporti ha lunghezza $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, quindi $\langle r_+, r_- \rangle = \frac{1}{3}$. Dunque $\|y\|^2 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Inoltre

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} y(t) dt = \int_{-1/2}^{-1/6} (-1) dt + \int_{-1/6}^{1/6} 0 dt + \int_{1/6}^{1/2} (+1) dt = 0.$$

c) Sì: $x \perp y$. Quindi

$$\|z\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

d) Controllo a tratti: $z = x + y$ assume valori in $\{-1, 0, 1, 2\}$. Sommare “livello² × lunghezza” e si ottiene $\frac{7}{3}$.

Esercizio 2. Norme e prodotti scalari

Siano

$$x(t) = \text{tri}(t), \quad y(t) = \text{tri}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

a) Calcolare $\|x\|^2$ e $\|y\|^2$.

b) Calcolare $\langle x, y \rangle$ (spezzare l'integrale nei punti in cui cambiano le espressioni).

c) Calcolare $\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ e la distanza $d(x, y) = \|x - y\|$.

Svolgimento.

a)

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^1 (1 - |t|)^2 dt = 2 \int_0^1 (1 - t)^2 dt = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Quindi } \|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ e } \|y\| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

b) Supporti: x su $[-1, 1]$, y su $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, intersezione $[-\frac{1}{2}, 1]$. Spezzare in $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1/2}^0 (1 + t) \left(t + \frac{1}{2}\right) dt + \int_0^{1/2} (1 - t) \left(t + \frac{1}{2}\right) dt + \int_{1/2}^1 (1 - t) \left(\frac{3}{2} - t\right) dt = \frac{23}{48}.$$

c)

$$\cos \alpha = \frac{\frac{23}{48}}{\frac{2}{3}} = \frac{23}{32}, \quad \|x - y\|^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{23}{48} = \frac{3}{8},$$

$$\text{quindi } d(x, y) = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Esercizio 3. Base ortonormale

Siano

$$a(t) = \text{rect}(t), \quad b(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right),$$

e definiamo

$$x(t) = a(t) + b(t), \quad y(t) = a(t) - 2b(t).$$

a) Calcolare $\|x\|^2$, $\|y\|^2$ e $\langle x, y \rangle$.

b) Costruire una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di $\text{span}\{x, y\}$ con $e_1 \parallel x$.

c) Trovare le coordinate di x e y in $\{e_1, e_2\}$.

d) Esprimere a e b come combinazioni lineari di x e y , e trovare le loro coordinate in $\{e_1, e_2\}$.

Svolgimento.

Idea chiave: $\|a\|^2 = \|b\|^2 = 1$ e $\langle a, b \rangle = \text{lunghezza}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [0, 1]) = \frac{1}{2}$.

a)

$$\|x\|^2 = \langle a+b, a+b \rangle = 1+1+2 \cdot \frac{1}{2} = 3, \quad \|y\|^2 = \langle a-2b, a-2b \rangle = 1+4-4 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle a+b, a-2b \rangle = 1-2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

b) $\|x\| = \sqrt{3}$, quindi $e_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

$$\langle y, e_1 \rangle = \frac{\langle y, x \rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-3/2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{e}_2 = y - \langle y, e_1 \rangle e_1 = y + \frac{1}{2}x.$$

$$\|\tilde{e}_2\|^2 = \|y + \frac{1}{2}x\|^2 = 3 + \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \|\tilde{e}_2\| = \frac{3}{2}, \quad e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{2}{3} \left(y + \frac{1}{2}x \right).$$

c)

$$x \equiv (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle) = (\sqrt{3}, 0), \quad y \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

d) Da $x = a+b$, $y = a-2b$:

$$b = \frac{x-y}{3}, \quad a = \frac{2x+y}{3}.$$

Quindi

$$b \equiv \frac{1}{3}(x-y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad a \equiv \frac{1}{3}(2x+y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Esercizio 4. Proiezione su due rettangoli

Siano

$$s(t) = \text{tri}(t), \quad \phi_1(t) = \text{rect}(t), \quad \phi_2(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Cercare la migliore approssimazione

$$\hat{s}(t) = a\phi_1(t) + b\phi_2(t)$$

in senso dei minimi quadrati, cioè come proiezione ortogonale di s su $V = \text{span}\{\phi_1, \phi_2\}$.

Richiamo: per la proiezione, l'errore $e = s - \hat{s}$ è ortogonale a V , quindi $\langle e, \phi_1 \rangle = 0$ e $\langle e, \phi_2 \rangle = 0$.

a) Scrivere il sistema in a, b .

b) Calcolare i prodotti scalari necessari.

c) Risolvere e trovare a, b .

d) Calcolare $\|s - \hat{s}\|^2$ usando $\langle s - \hat{s}, \hat{s} \rangle = 0 \Rightarrow \|s - \hat{s}\|^2 = \|s\|^2 - \|\hat{s}\|^2$ e $\|\hat{s}\|^2 = \langle s, \hat{s} \rangle$.

Svolgimento.

a)

$$\begin{cases} a \langle \phi_1, \phi_1 \rangle + b \langle \phi_2, \phi_1 \rangle = \langle s, \phi_1 \rangle \\ a \langle \phi_1, \phi_2 \rangle + b \langle \phi_2, \phi_2 \rangle = \langle s, \phi_2 \rangle. \end{cases}$$

b) $\langle \phi_1, \phi_1 \rangle = 1$, $\langle \phi_2, \phi_2 \rangle = 1$, $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_2, \phi_1 \rangle = \frac{1}{2}$.

$$\langle s, \phi_1 \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} (1-|t|) dt = \frac{3}{4}, \quad \langle s, \phi_2 \rangle = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{6}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

d) $\|s\|^2 = \frac{2}{3}.$

$$\langle s, \hat{s} \rangle = a \langle s, \phi_1 \rangle + b \langle s, \phi_2 \rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \Rightarrow \|\hat{s}\|^2 = \frac{7}{12}.$$

Quindi $\|s - \hat{s}\|^2 = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}.$

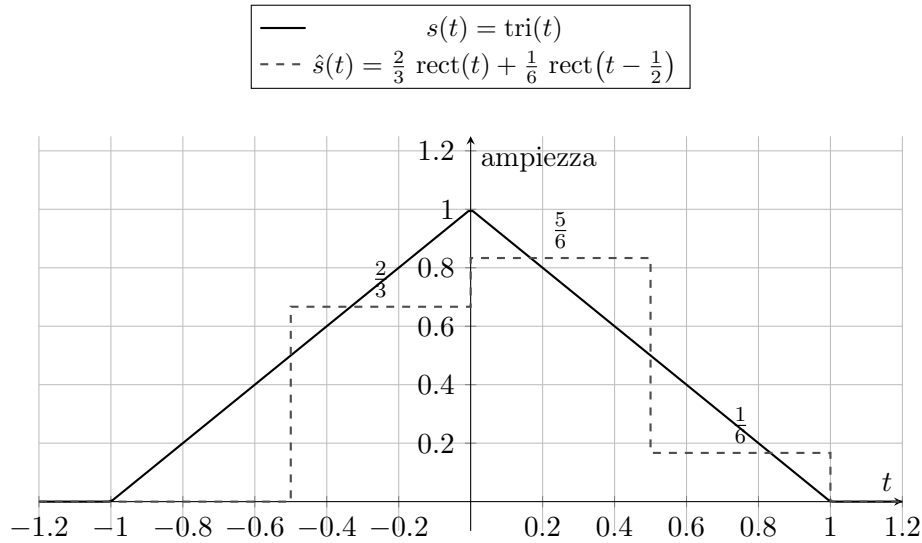


Figura 1: Proiezione (minimi quadrati) di $\text{tri}(t)$ su $\text{span}\{\text{rect}(t), \text{rect}(t - \frac{1}{2})\}$.

Esercizio 5. Periodici: proiezione su $\{1, \cos\}$ ed errore

Sia $T > 0$. Considerare l'impulso periodico di duty-cycle $D = \frac{1}{3}$ ottenuto dalla replica di

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{3t}{T}\right) \quad (\text{quindi } p(t) = 1 \text{ per } |t| \leq T/6)$$

con periodo T , cioè $x(t)$ è la sua estensione periodica di periodo T .

Considerare $V = \text{span}\{1, \cos(2\pi t/T)\}$ nello spazio periodico con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$.

- Calcolare $\bar{x} = \langle x, 1 \rangle_T$ e $P_x = \|x\|_T^2$.
- Calcolare A tale che $\hat{x}(t) = \bar{x} + A \cos(2\pi t/T)$ sia la proiezione di x su V .
- Calcolare $P_e = \|x - \hat{x}\|_T^2$.

Svolgimento.

- Su un periodo $x = 1$ per durata $\Delta = DT = T/3$:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int x(t) dt = \frac{\Delta}{T} = \frac{1}{3}, \quad P_x = \frac{1}{T} \int x(t)^2 dt = \bar{x} = \frac{1}{3}.$$

b) In V , $1 \perp \cos(2\pi t/T)$.

$$A = \frac{\langle x, \cos \rangle_T}{\langle \cos, \cos \rangle_T}.$$

$$\langle \cos, \cos \rangle_T = \frac{1}{2}, \quad \langle x, \cos \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/6}^{T/6} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Quindi $A = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

c)

$$P_{\hat{x}} = \|\hat{x}\|_T^2 = \bar{x}^2 + \frac{A^2}{2} = \frac{1}{9} + \frac{3}{2\pi^2}, \quad P_e = P_x - P_{\hat{x}} = \frac{2}{9} - \frac{3}{2\pi^2}.$$

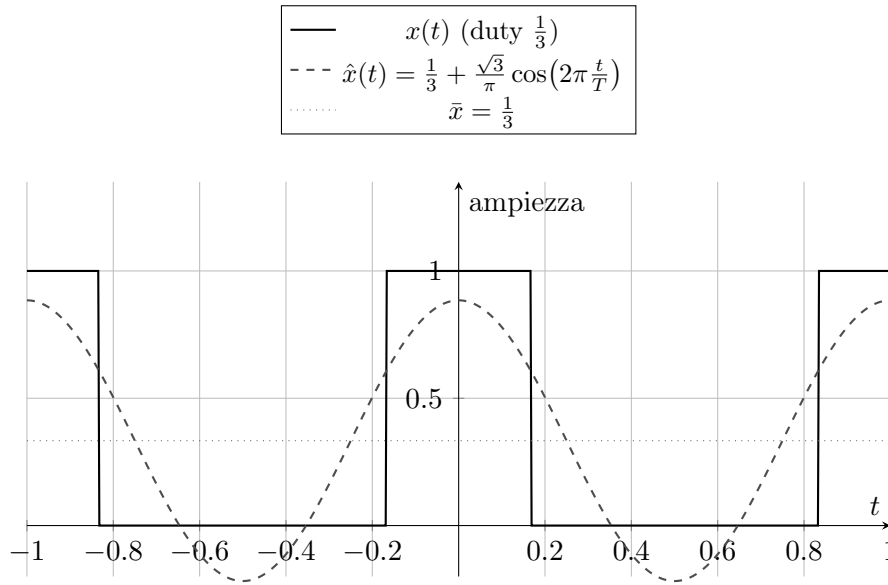


Figura 2: Impulso periodico e sua proiezione su $\text{span}\{1, \cos(2\pi t/T)\}$ (nel grafico $T = 1$).

Esercizio 6. Proiezione su esponenziali complessi: primi coefficienti e traslazione

Sia fissato un periodo $T > 0$. Per $k \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$e_k(t) = e^{j2\pi \frac{k}{T} t}.$$

Consideriamo il segnale periodico ottenuto dalla replica di

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{3}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right)\right) \quad (\text{impulso di ampiezza 1, durata } T/3, \text{ centrato in } T/4),$$

cioè $x(t)$ è l'estensione periodica di $p(t)$ con periodo T .

- Mostrare che $\{e_k\}$ è ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$.
- Per $V_1 = \text{span}\{e_{-1}, e_0, e_1\}$, calcolare c_0 e $c_{\pm 1}$ dove $c_k = \langle x, e_k \rangle_T$.
- Riscrivere $\hat{x}(t) = c_{-1}e_{-1}(t) + c_0e_0(t) + c_1e_1(t)$ in forma reale.
- Calcolare P_x , $P_{\hat{x}}$ e $P_e = P_x - P_{\hat{x}}$.

Svolgimento.

- a) Come già visto: $\langle e_m, e_n \rangle_T = \delta_{mn}$ integrando $e^{j2\pi(m-n)t/T}$ su un periodo.
 b) Su un periodo centrato, $x(t) = 1$ per $t \in [T/12, 5T/12]$, durata $\Delta = T/3$.

$$c_0 = \frac{1}{T} \int x(t) dt = \frac{\Delta}{T} = \frac{1}{3}.$$

Per $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{T/12}^{5T/12} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = e^{-j2\pi \frac{k}{T} \cdot \frac{T}{4}} \cdot \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right).$$

Per $k = 1$:

$$c_1 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -j \frac{\sqrt{3}}{2\pi}, \quad c_{-1} = c_1^* = +j \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

c)

$$\hat{x}(t) = c_0 + c_1 e^{j2\pi \frac{t}{T}} + c_{-1} e^{-j2\pi \frac{t}{T}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

- d) $P_x = \frac{1}{T} \int x(t)^2 dt = \frac{1}{3}$. Base ortonormale $\Rightarrow P_{\hat{x}} = |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 = \frac{1}{9} + \frac{3}{2\pi^2}$. Quindi $P_e = \frac{2}{9} - \frac{3}{2\pi^2}$.

Esercizio 7. Base infinita di rettangoli traslati: proiezione ed energia dell'errore

Per $k \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$\varphi_k(t) = \text{rect}\left(t - k - \frac{1}{2}\right),$$

quindi $\varphi_k(t) = 1$ per $t \in [k, k+1]$ e 0 altrove. Sia

$$x(t) = e^{-t} u(t).$$

- a) Mostrare che $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è ortonormale.
 b) Considerare $V = \overline{\text{span}\{\varphi_k : k \geq 0\}}$ e scrivere la proiezione

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(t), \quad a_k = \langle x, \varphi_k \rangle.$$

Calcolare a_k .

- c) Interpretare a_k come media su $[k, k+1]$.
 d) Calcolare $\|x\|^2$, $\|\hat{x}\|^2 = \sum_{k \geq 0} |a_k|^2$ e $\|x - \hat{x}\|^2$.
 e) (Opzionale) Troncamento $\hat{x}_N$ e $\|x - \hat{x}_N\|^2$.

Svolgimento.

- a) Supporti disgiunti per $k \neq m \Rightarrow \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = 0$. Inoltre $\|\varphi_k\|^2 = \int_k^{k+1} 1 dt = 1$.
 b) Per $k \geq 0$:

$$a_k = \int_k^{k+1} e^{-t} dt = e^{-k} - e^{-(k+1)} = (1 - e^{-1})e^{-k}.$$

- c) $a_k = \int_k^{k+1} x(t) dt$: media (qui, intervallo di lunghezza 1).

d)

$$\|x\|^2 = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \frac{1}{2}, \quad \|\hat{x}\|^2 = (1 - e^{-1})^2 \sum_{k=0}^\infty e^{-2k} = \frac{(1 - e^{-1})^2}{1 - e^{-2}} = \frac{e - 1}{e + 1}.$$

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \frac{1}{2} - \frac{e - 1}{e + 1} = \frac{3 - e}{2(e + 1)}.$$

e) (Opz.) $\|\hat{x}_N\|^2 = (1 - e^{-1})^2 \frac{1 - e^{-2N}}{1 - e^{-2}}$, quindi $\|x - \hat{x}_N\|^2 = \frac{1}{2} - (1 - e^{-1})^2 \frac{1 - e^{-2N}}{1 - e^{-2}}$.

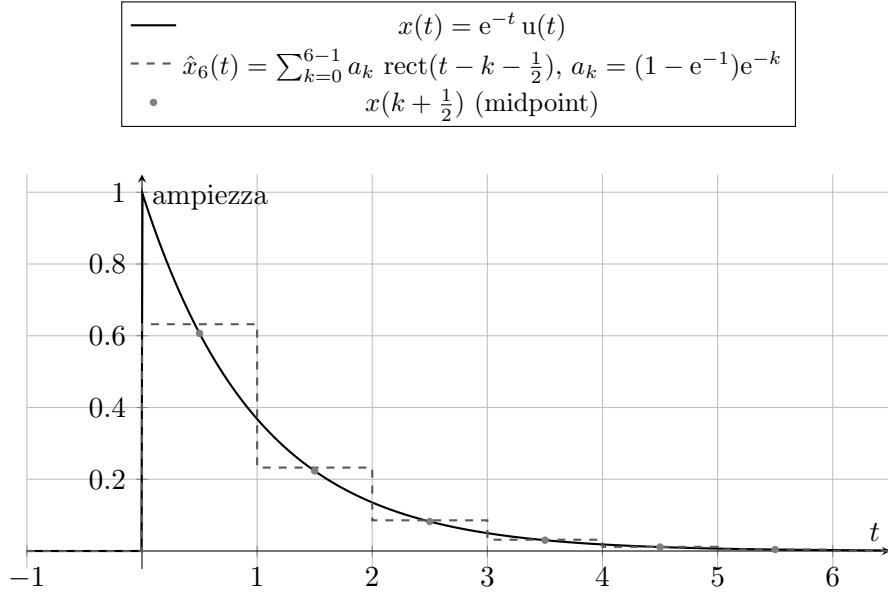


Figura 3: Approssimazione a gradini di $x(t) = e^{-t} u(t)$ tramite base di rettangoli traslati.

Esercizio 8. Delta di Dirac

Sia

$$x(t) = \text{tri}(t) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right).$$

a) Semplificare

$$y(t) = x(t)\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2x(t)\delta\left(t + \frac{3}{4}\right) + 3x(t)\delta\left(t - \frac{3}{2}\right).$$

b) Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt$.

c) Scrivere $x(t) = \int x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$ e interpretarla in una riga.

d) Considerare il pettine traslato (campionamento ai seminteri)

$$\delta_1\left(t - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad x_s(t) = x(t) \delta_1\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Mostrare che $x_s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k + \frac{1}{2})\delta(t - (k + \frac{1}{2}))$.

e) Scrivere esplicitamente $x_s(t)$ (impulsi non nulli e coefficienti).

f) Calcolare $\int x_s(t) dt$ e interpretare come somma dei campioni.

Svolgimento.

a) Campionamento:

$$y(t) = x\left(\frac{1}{2}\right)\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2x\left(-\frac{3}{4}\right)\delta\left(t + \frac{3}{4}\right) + 3x\left(\frac{3}{2}\right)\delta\left(t - \frac{3}{2}\right).$$

Valori:

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = \text{tri}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{rect}(-1) = \frac{1}{2}, \quad x\left(-\frac{3}{4}\right) = \text{tri}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad x\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{rect}(0) = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$y(t) = \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\delta\left(t - \frac{3}{2}\right).$$

b) $\int y(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

c)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

(ogni valore $x(\tau)$ pesa una delta centrata in τ).

d)

$$x_s(t) = x(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x\left(k + \frac{1}{2}\right) \delta\left(t - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right).$$

e) Campioni non nulli: $x(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $x(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$. Quindi

$$x_s(t) = \frac{1}{2}\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{3}{2}\right).$$

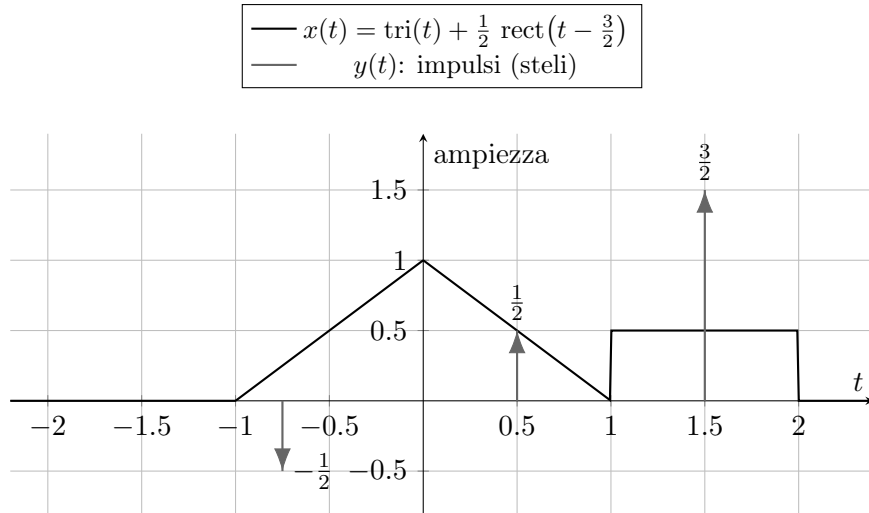


Figura 4: Segnale $x(t)$ e rappresentazione grafica (a steli) degli impulsi di $y(t)$.

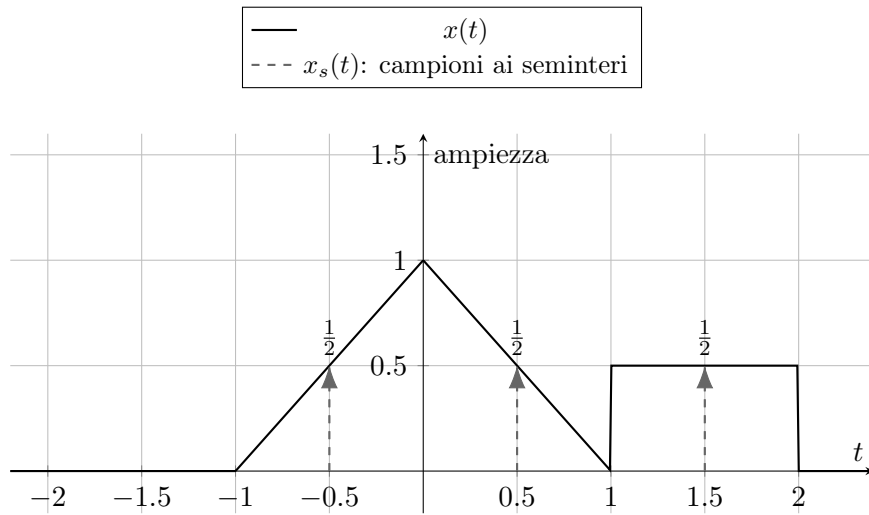


Figura 5: Segnale $x(t)$ e campionamento $x_s(t) = x(t) \delta_1(t - \frac{1}{2})$ rappresentato con steli.

f) $\int x_s(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: somma dei campioni.

Esercizio 9. Proiezione su esponenziali complessi: usando c_0, c_1, c_{-2}

Sia fissato un periodo $T > 0$ e sia j l'unità immaginaria ($j^2 = -1$). Nel sottospazio dei segnali periodici di periodo T usiamo il prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) dt.$$

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$e_k(t) = e^{j2\pi \frac{k}{T} t}.$$

Consideriamo il segnale periodico $x(t)$ ottenuto dall'estensione periodica di

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{3t}{T}\right),$$

cioè su un periodo centrato in 0 vale

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{6} \\ 0, & \frac{T}{6} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Considerare il sottospazio $V = \text{span}\{e_0, e_1, e_{-2}\}$ e la proiezione

$$\hat{x}(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + c_{-2} e_{-2}(t), \quad c_k = \langle x, e_k \rangle_T.$$

- Calcolare c_0 , c_1 e c_{-2} .
- Scrivere esplicitamente $\hat{x}(t)$.
- Calcolare $P_x = \|x\|_T^2$, $P_{\hat{x}} = \|\hat{x}\|_T^2$ e $P_e = \|x - \hat{x}\|_T^2$.
- (Commento) Spiegare perché $\hat{x}(t)$ può risultare complessa pur avendo $x(t)$ reale.

Svolgimento.

- Su un periodo centrato in 0, $x(t) = 1$ per $t \in [-T/6, T/6]$ e 0 altrove.

Coefficiente c_0 :

$$c_0 = \langle x, e_0 \rangle_T = \frac{1}{T} \int x(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{3} = \frac{1}{3}.$$

Formula generale per $k \neq 0$:

$$c_k = \langle x, e_k \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/6}^{T/6} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right).$$

(qui si usa $e^{-j\alpha} - e^{j\alpha} = -2j \sin \alpha$).

Quindi:

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}, \quad c_{-2} = \frac{1}{\pi(-2)} \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}.$$

- Siccome $e_0(t) = 1$:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} e^{j2\pi \frac{t}{T}} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{-j2\pi \frac{2}{T} t}.$$

Se vuoi separare parte reale/immaginaria:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} (\cos \theta + j \sin \theta) + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} (\cos 2\theta - j \sin 2\theta), \quad \theta = 2\pi \frac{t}{T}.$$

- Poiché $x(t) \in \{0, 1\}$ e vale 1 per frazione $D = \frac{1}{3}$ del periodo:

$$P_x = \|x\|_T^2 = \frac{1}{T} \int x(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int x(t) dt = \frac{1}{3}.$$

La famiglia $\{e_k\}$ è ortonormale, quindi per la proiezione su V :

$$P_{\hat{x}} = \|\hat{x}\|_T^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_{-2}|^2.$$

Ora

$$|c_0|^2 = \frac{1}{9}, \quad |c_1|^2 = \frac{3}{4\pi^2}, \quad |c_{-2}|^2 = \frac{3}{16\pi^2}.$$

Quindi

$$P_{\hat{x}} = \frac{1}{9} + \frac{15}{16\pi^2}.$$

Essendo $\hat{x}$ una proiezione ortogonale:

$$P_e = P_x - P_{\hat{x}} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{9} + \frac{15}{16\pi^2} \right) = \frac{2}{9} - \frac{15}{16\pi^2}.$$

- d) (Commento) Il sottospazio $V = \text{span}\{e_0, e_1, e_{-2}\}$ non contiene le coppie coniugate (e_{-1} manca e e_2 manca), quindi non è “chiuso per coniugio”. Perciò la migliore approssimazione in V può essere complessa anche se x è reale. Se si vuole una proiezione reale, conviene proiettare su un sottospazio che contenga le coppie $e_{\pm k}$ (equivalentemente: su $\{1, \cos, \sin\}$).