

Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 2

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Convenzioni e notazione (valide per tutti gli esercizi).

- $\text{rect}(t) = 1$ per $|t| < \frac{1}{2}$, altrimenti 0.
- $\text{tri}(t) = 1 - |t|$ per $|t| \leq 1$, altrimenti 0.
- $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$, $\text{sinc}(0) = 1$.
- $u(t) = 1$ per $t > 0$, altrimenti 0.
- TF continua:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

- Serie di Fourier di $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT)$, periodo T :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right).$$

Esercizio 1. TF notevoli: delta nel tempo e nel dominio delle frequenze (con dualità)

- Calcolare la TF di $\delta(t - t_0)$.
- Usare la dualità per dedurre:

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f), \quad \mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0).$$

Svolgimento.

- Campionamento della delta:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f t_0}.$$

- Dualità. Parto dall'antitrasformata:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi \nu t} d\nu.$$

Valuto $x(-f)$ (qui f è una variabile reale, la stessa che useremo come variabile di trasformata):

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi \nu (-f)} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{-j2\pi f \nu} d\nu.$$

Ma l'ultima espressione è *esattamente* la definizione di trasformata di Fourier di $X(t)$, considerato come funzione del tempo t , valutata alla frequenza f :

$$\mathcal{F}\{X(t)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Quindi abbiamo mostrato la proprietà di dualità:

$$\boxed{x(t) \leftrightarrow X(f) \implies X(t) \leftrightarrow x(-f)}.$$

Ora usiamo la dualità per ottenere trasformate notevoli.

- Dal punto (a) con $t_0 = 0$: $\delta(t) \leftrightarrow 1$. Applicando dualità: $1 \leftrightarrow \delta(-f) = \delta(f)$. Quindi

$$\boxed{\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)}.$$

- Dal punto (a): $\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$. Applicando dualità (con $t_0 = -f_0$):

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0),$$

cioè

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)}.$$

Esercizio 2. Inversione ed estrazione della parte pari/dispari

Con $x(t) = e^{-t} u(t)$:

- Calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$.
- (Inversione temporale) Calcolare la TF di $x(-t)$ e verificarla anche via proprietà $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$.
- Definire parte pari e dispari:

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x_d(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Scrivere esplicitamente $x_p(t)$ e $x_d(t)$.

- Ricavare $X_p(f)$ e $X_d(f)$ a partire da $X(f)$ e $X(-f)$. Concludere sulla parità e sul fatto che X_p è reale mentre X_d è puramente immaginaria.

Svolgimento.

- Per definizione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j2\pi f)t} dt.$$

Quindi

$$X(f) = \left[\frac{-1}{1+j2\pi f} e^{-(1+j2\pi f)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}.$$

- $x(-t) = e^t u(-t)$. Per inversione temporale:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(-t)\}(f) = X(-f) = \frac{1}{1-j2\pi f}.$$

-

$$x_p(t) = \frac{e^{-t} u(t) + e^t u(-t)}{2} = \frac{1}{2} e^{-|t|}, \quad x_d(t) = \frac{e^{-t} u(t) - e^t u(-t)}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) e^{-|t|}.$$

- Per linearità:

$$X_p(f) = \frac{X(f) + X(-f)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f} \right) = \frac{1}{1+(2\pi f)^2},$$

reale e pari.

$$X_d(f) = \frac{X(f) - X(-f)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{1-j2\pi f} \right) = -j \frac{2\pi f}{1+(2\pi f)^2},$$

puramente immaginaria e dispari.

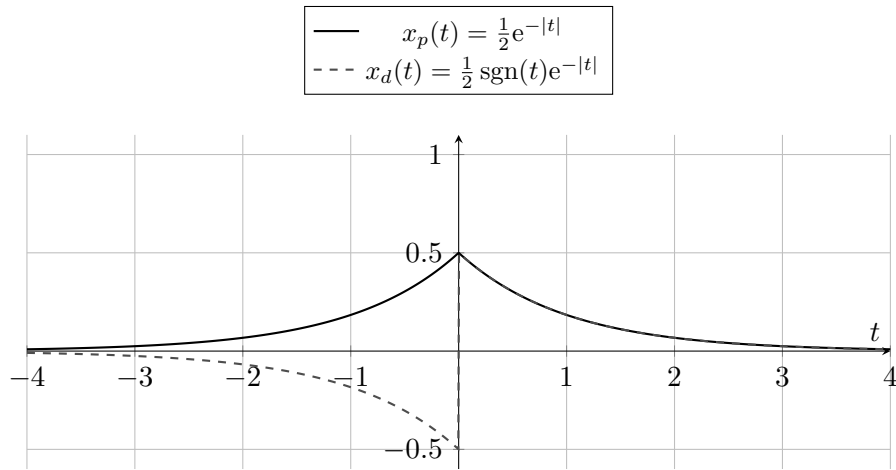


Figura 1: Parte pari e dispari di $x(t) = e^{-t} u(t)$.

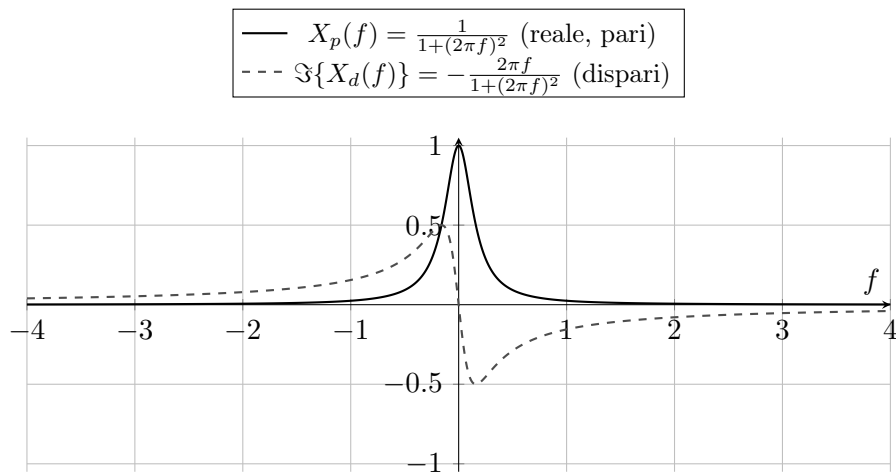


Figura 2: Spettri della parte pari (reale) e della parte dispari (puramente immaginaria).

Esercizio 3. Traslazione e modulazione usando $x(t) = e^{-t} u(t)$

Sia $x(t) = e^{-t} u(t)$ e $X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$.

- (Traslazione) $y(t) = x(t - t_0)$. Trovare $Y(f)$ e descrivere modulo e fase.
- (Modulazione) $z(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$. Trovare $Z(f)$ e descrivere lo spostamento spettrale.
- Fare un plot di $|X(f)|$ e $|Z(f)|$.

Svolgimento.

a)

$$y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f)e^{-j2\pi f t_0}.$$

Modulo invariato, fase lineare $-2\pi f t_0$.

b)

$$z(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow Z(f) = X(f - f_0) = \frac{1}{1 + j2\pi(f - f_0)}.$$

c) Il modulo $|Z(f)|$ è lo stesso di $|X|$, centrato in f_0 .

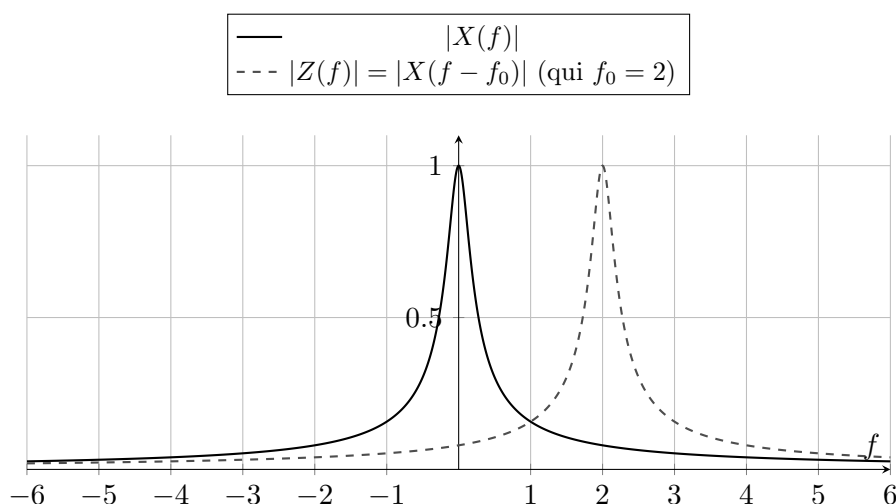


Figura 3: Modulazione nel tempo $\Rightarrow$ traslazione del modulo in frequenza (stesso inviluppo).

Esercizio 4. TF di coseno e seno

- Calcolare $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\}$.
- Calcolare $\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\}$.
- Qual è la parità della parte reale ed immaginaria degli spettri?

Svolgimento.

a)

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right) \Rightarrow \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

b)

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} \left(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t} \right) \Rightarrow \mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)].$$

c) Il coseno (reale e pari) ha spettro reale e pari. Il seno (reale e dispari) ha spettro puramente immaginario e dispari.

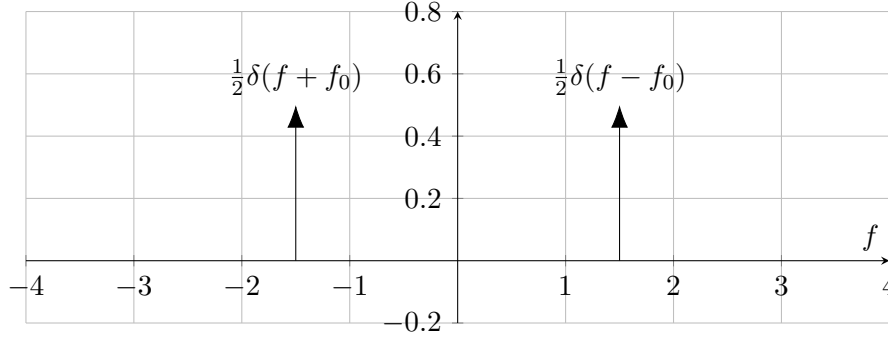


Figura 4: Spettro del coseno: due delta centrate $\pm f_0$.

Esercizio 5. Proprietà di derivazione $\Rightarrow$ TF del triangolo $\text{tri}(t)$

Sia $x(t) = \text{tri}(t)$.

a) Mostrare (come funzioni a tratti) che

$$x'(t) = \text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

b) Calcolare la TF di $x'(t)$ usando le TF dei rettangoli traslati.

c) Usare la proprietà $\mathcal{F}\{x'(t)\} = j2\pi f X(f)$ per ricavare $X(f)$.

d) Concludere che

$$\boxed{\mathcal{F}\{\text{tri}(t)\} = \text{sinc}^2(f)}$$

Svolgimento.

a) $\text{tri}(t)$ cresce con pendenza $+1$ su $(-1, 0)$ e decresce con pendenza -1 su $(0, 1)$, zero altrove:

$$x'(t) = 1 \text{ su } [-1, 0], \quad x'(t) = -1 \text{ su } [0, 1] \Rightarrow x'(t) = \text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

b) $\mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} = \text{sinc}(f)$. Per traslazione:

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(t \mp \frac{1}{2})\} = e^{\pm j\pi f} \text{sinc}(f).$$

Quindi

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = \text{sinc}(f)(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}) = 2j \sin(\pi f) \text{sinc}(f) = 2j \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi f}.$$

c) Proprietà di derivazione:

$$j2\pi f X(f) = 2j \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi f} \Rightarrow X(f) = \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2 = \text{sinc}^2(f).$$

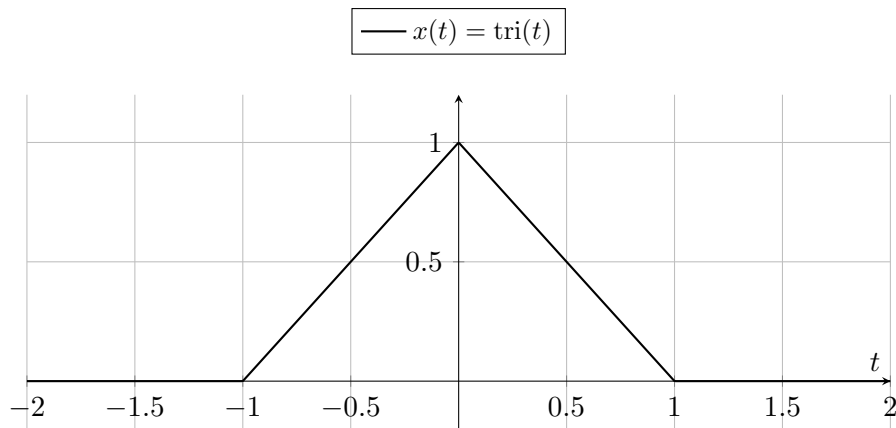


Figura 5: Triangolo: supporto compatto in tempo.

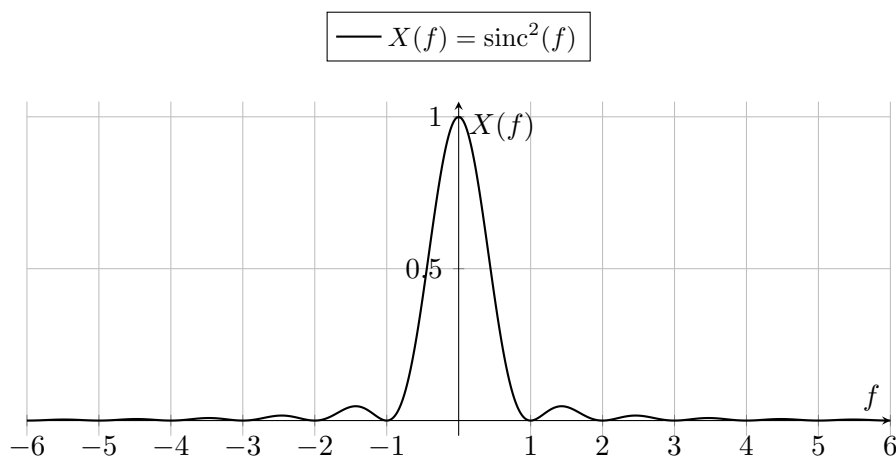


Figura 6: Spettro del triangolo: sinc^2 .

d) Quindi $\mathcal{F}\{\text{tri}(t)\} = \text{sinc}^2(f)$.

Esercizio 6. Gaussiana: TF come soluzione di un'equazione differenziale

Sia

$$x(t) = e^{-\pi t^2}.$$

a) Mostrare che $x'(t) = -2\pi t x(t)$, cioè $x'(t) + 2\pi t x(t) = 0$.

b) Applicare la TF e usare le proprietà:

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = j2\pi f X(f), \quad \mathcal{F}\{-j2\pi t x(t)\} = X'(f),$$

per ottenere un'equazione differenziale per $X(f)$.

c) Concludere che

$$X(f) = e^{-\pi f^2}$$

Svolgimento.

a) Derivata diretta: $x'(t) = (-2\pi t)e^{-\pi t^2} = -2\pi t x(t)$.

b) Trasformando $x'(t) + 2\pi tx(t) = 0$:

$$j2\pi f X(f) + 2\pi \cdot \frac{j}{2\pi} X'(f) = 0 \Rightarrow X'(f) + 2\pi f X(f) = 0.$$

c) Equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{X'(f)}{X(f)} = -2\pi f \Rightarrow \ln X(f) = -\pi f^2 + \text{cost.} \Rightarrow X(f) = C e^{-\pi f^2}.$$

Poiché $X(0) = \int e^{-\pi t^2} dt = 1$, allora $C = 1$.

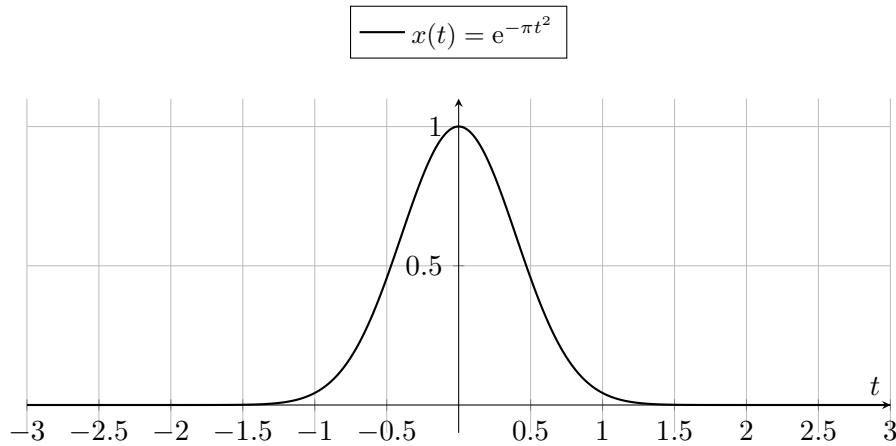


Figura 7: Gaussiana nel tempo.

Esercizio 7. Pettine di Dirac: serie di Fourier e trasformata (auto-similarità per $T = 1$)

Definiamo il pettine di impulsi (periodico di periodo $T > 0$)

$$\delta_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT).$$

a) Usando la definizione dei coefficienti della serie di Fourier complessa per segnali di periodo T , mostrare che i coefficienti di $\delta_T(t)$ sono tutti uguali a $\frac{1}{T}$, cioè

$$c_k = \frac{1}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Concludere che la serie di Fourier del pettine è

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi \frac{k}{T} t}.$$

c) Usare la coppia $\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)$ per calcolare la TF continua di $\delta_T(t)$ e mostrare che

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f) \quad \text{dove} \quad \delta_{1/T}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Svolgimento.

a) Per definizione

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

In un qualsiasi intervallo lungo T cade *esattamente un* impulso di Dirac, quindi l'integrale si riduce al valore dell'esponenziale nel punto dell'impulso:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) = \frac{1}{T}.$$

b) Sostituendo nella serie complessa:

$$\delta_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi \frac{k}{T} t}.$$

c) Applicando la TF termine a termine (in senso di distribuzioni):

$$\mathcal{F} \left\{ e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \right\} = \delta \left(f - \frac{k}{T} \right).$$

Quindi

$$\mathcal{F} \{ \delta_T(t) \} = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f).$$

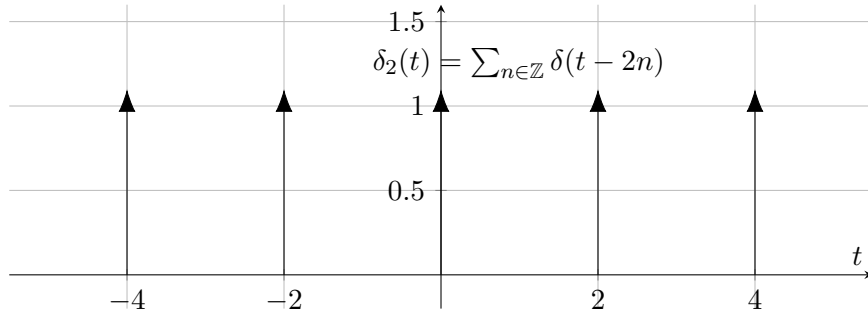


Figura 8: Pettine di Dirac nel tempo con periodo $T = 2$ (passo 2).

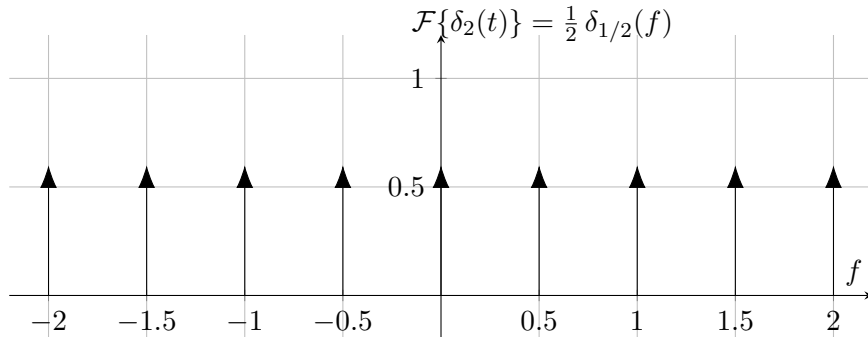


Figura 9: Pettine in frequenza: passo $1/T = \frac{1}{2}$ e fattore $\frac{1}{T} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 8. Serie di Fourier del triangolo periodico via TF nota

Definire il segnale periodico di periodo $T = 2$ come estensione periodica di $p(t) = \text{tri}(t)$:

$$x_p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{tri}(t - 2n).$$

- a) Usando $P(f) = \mathcal{F}\{\text{tri}(t)\} = \text{sinc}^2(f)$, mostrare che i coefficienti della serie complessa sono

$$c_k = \frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right).$$

- b) Concludere che $c_k = 0$ per k pari e, per k dispari,

$$c_k = \frac{2}{\pi^2 k^2}.$$

- c) Scrivere la serie reale (solo coseni) nella forma

$$x_p(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(\pi k t).$$

- d) Disegnare qualitativamente $x_p(t)$ su due periodi e lo spettro a righe $|c_k|$.

Svolgimento.

- a) Formula ponte: per replica periodica $x_p(t) = \sum p(t - nT)$, vale $c_k = \frac{1}{T} P(k/T)$. Con $T = 2$ e $P(f) = \text{sinc}^2(f)$:

$$c_k = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right).$$

- b) Se k è pari, $\sin(\pi k/2) = 0 \Rightarrow \text{sinc}(k/2) = 0 \Rightarrow c_k = 0$. Se k è dispari, $\sin(\pi k/2) = \pm 1 \Rightarrow \text{sinc}(k/2) = \pm \frac{2}{\pi k}$, quindi $c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2 k^2} = \frac{2}{\pi^2 k^2}$.

- c) $c_0 = \frac{1}{2} \text{sinc}^2(0) = \frac{1}{2}$. Essendo x_p reale e pari:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(\pi k t) \\ &= \frac{1}{2} + 2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ dispari}}} \frac{2}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k t) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} \cos(\pi (2m+1)t). \end{aligned}$$

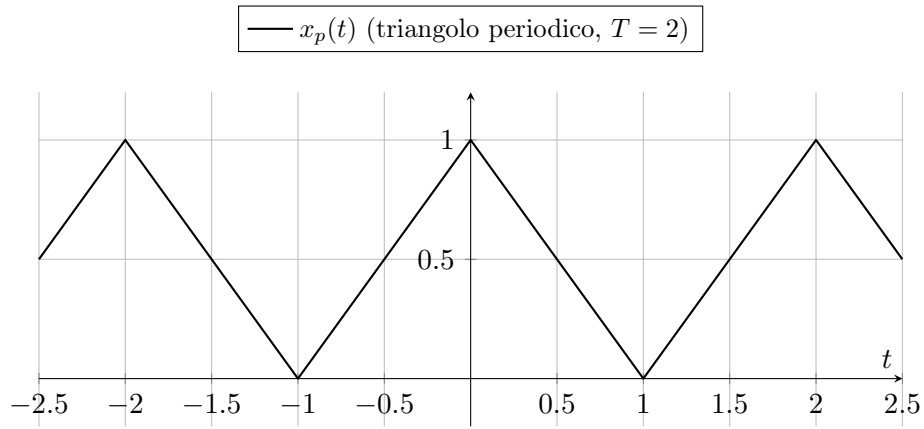


Figura 10: Triangolo periodico su due periodi.

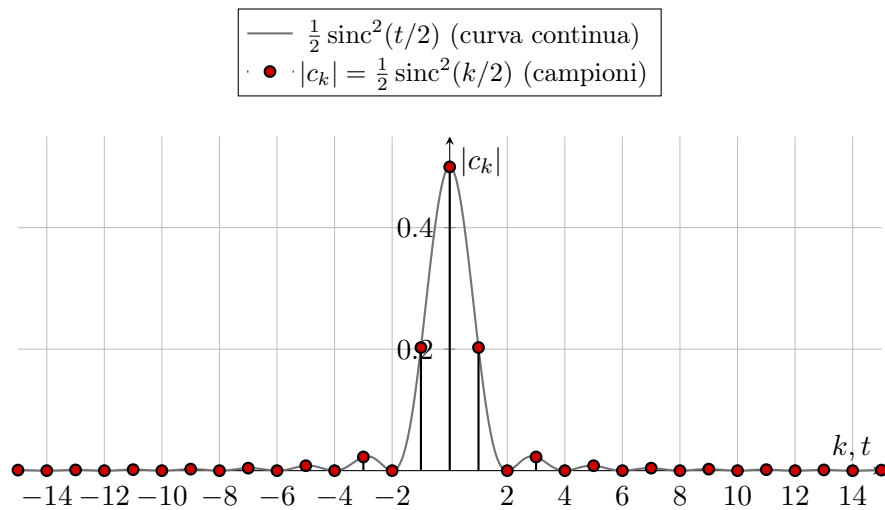


Figura 11: Coefficienti c_k come campioni della curva continua $\frac{1}{2} \text{sinc}^2(t/2)$: zeri per k pari e decadimento $\sim 1/k^2$.

Esercizio 9. Rampa periodica: serie di Fourier e somma dei reciproci dei quadrati

Sia $x(t)$ periodico di periodo 2π definito su $(-\pi, \pi)$ da $x(t) = t, t \in (-\pi, \pi)$, e poi esteso periodicamente.

a) Calcolare i coefficienti complessi:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jkt} dt.$$

b) Riscrivere la serie in forma reale (solo seni).

c) Verificare che:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

Svolgimento.

a) $c_0 = 0$. Per $k \neq 0$ (integrazione per parti) si ottiene $c_k = \frac{j(-1)^k}{k}$.

b) Essendo x reale e dispari:

$$x(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt).$$

c) La potenza del segnale $x(t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'altra parte:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

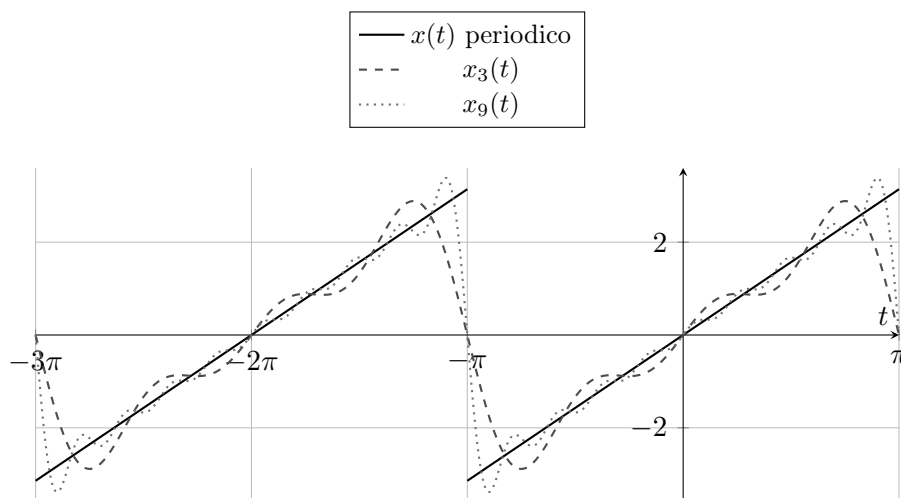


Figura 12: Rampa periodica e somme parziali.