

Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 3

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Convenzioni (valide per tutti gli esercizi).

- TF continua:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

- Convoluzione continua e discreta:

$$(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k].$$

- Parseval:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df.$$

Esercizio 1. Convoluzione continua di due rettangoli diversi e traslati

Considerare

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \quad (\text{rettangolo di larghezza 2 centrato in } 1),$$

$$h(t) = \text{rect}(t+1) \quad (\text{rettangolo di larghezza 1 centrato in } -1).$$

Sia $y(t) = (x * h)(t)$.

- Spiegare geometricamente come si costruisce $y(t)$: si fissa $x(\tau)$, si ribalta h , si trasla di t e si guarda la sovrapposizione.
- Trovare $y(t)$ in forma analitica (funzione a tratti). Mostrare che $y(t)$ è un trapezio.
- Indicare: supporto di $y(t)$, valore massimo e ampiezza della “zona piatta”.

Svolgimento.

- Scrivo la convoluzione nella variabile τ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Il modo pratico di leggerla è questo:

- si fissa $x(\tau)$;
- si prende $h(\tau)$, lo si ribalta ottenendo $h(-\tau)$;
- poi lo si trasla di t , ottenendo $h(t - \tau)$;
- infine si calcola l'area della sovrapposizione tra $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$.

- Supporti:

$$\text{supp } x = [0, 2], \quad \text{supp } h = [-1.5, -0.5].$$

Poiché

$$h(t - \tau) = 1 \iff t - \tau \in [-1.5, -0.5] \iff \tau \in [t + 0.5, t + 1.5],$$

il segnale ribaltato e traslato occupa, nella variabile τ , l'intervallo

$$[t + 0.5, t + 1.5].$$

Quindi $y(t)$ si ottiene guardando quanta parte di $[0, 2]$ viene coperta da questo intervallo mobile. Ne segue:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \frac{3}{2}, \\ t + \frac{3}{2}, & -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}, \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - t, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Dunque $y(t)$ è un trapezio.

- c) Il supporto è $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Il valore massimo è 1, cioè la larghezza del rettangolo più stretto. La zona piatta è $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, quindi ha ampiezza 1.

Osservazione. Se invece si convolvono due rettangoli con la *stessa* base, non può esserci una zona piatta: la sovrapposizione cresce linearmente fino al massimo e poi decresce linearmente. In quel caso l'uscita è un *triangolo*, non un trapezio.

Questo è coerente anche con il dominio delle frequenze:

$$\text{rect}(t) * \text{rect}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}^2(f) \implies \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{tri}(t)$$

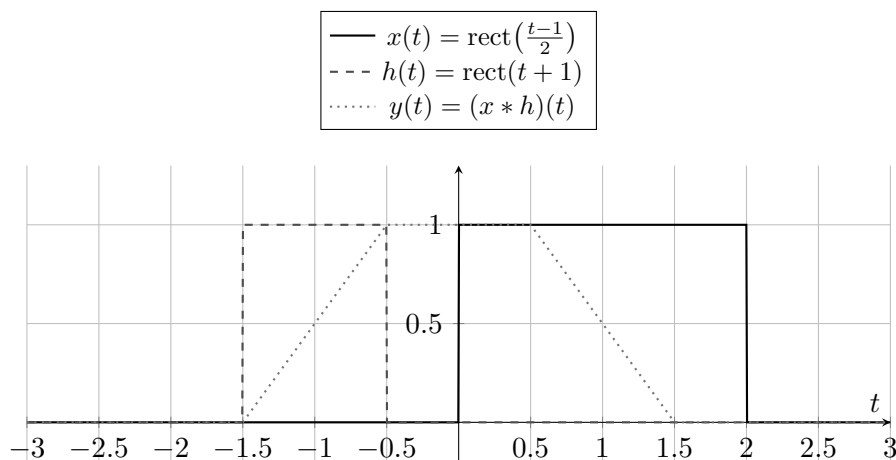


Figura 1: Convoluzione di due rettangoli di larghezza diversa: trapezio.

Esercizio 2. Convoluzione discreta: due esponenziali causali

Definire le successioni

$$x[n] = e^{-n} u[n], \quad h[n] = e^{-2n} u[n],$$

dove $u[n] = 1$ per $n \geq 0$ e 0 altrimenti.

- Calcolare $y[n] = (x * h)[n]$ in forma chiusa.
- Calcolare esplicitamente $y[0], y[1], y[2]$.

Svolgimento.

a) Per causalità:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^n e^{-k} e^{-2(n-k)} = e^{-2n} \sum_{k=0}^n e^k.$$

Serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^n e^k = \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}.$$

Quindi, per $n \geq 0$,

$$y[n] = e^{-2n} \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1} = \frac{e^{-(n-1)} - e^{-2n}}{e - 1}, \quad y[n] = 0 \quad (n < 0).$$

b)

$$y[0] = 1, \quad y[1] = e^{-1} + e^{-2}, \quad y[2] = e^{-2} + e^{-3} + e^{-4}.$$

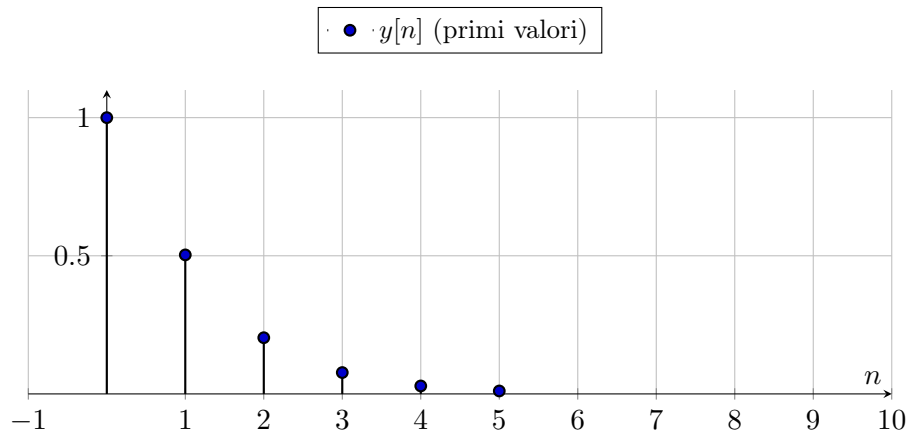


Figura 2: Convoluzione discreta di due esponenziali causali: risposta causale con decadimento esponenziale.

Esercizio 3. Convoluzione continua di esponenziali: nel tempo e in frequenza

Siano $a > 0$, $b > 0$ e

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad h(t) = e^{-bt} u(t).$$

Si consideri

$$y(t) = (x * h)(t).$$

- a) Calcolare $y(t)$ direttamente nel dominio del tempo, usando la definizione di convoluzione, distinguendo i casi $a \neq b$ e $a = b$.
- b) Calcolare $X(f)$ e $H(f)$.
- c) Usare $Y(f) = X(f)H(f)$ per ricavare di nuovo $y(t)$, distinguendo i casi $a \neq b$ e $a = b$.
- d) Verificare che i risultati ottenuti ai punti (a) e (c) coincidono.

Svolgimento.

a) Per definizione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-b(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau.$$

Le due funzioni gradino impongono

$$\tau \geq 0, \quad t - \tau \geq 0 \quad \implies \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

Quindi, per $t < 0$, si ha subito $y(t) = 0$. Per $t \geq 0$,

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau = e^{-bt} \int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau.$$

Caso $a \neq b$:

$$\int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau = \frac{e^{(b-a)t} - 1}{b - a},$$

dunque

$$y(t) = e^{-bt} \frac{e^{(b-a)t} - 1}{b - a} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}, \quad t \geq 0.$$

Quindi

$$y(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} u(t), \quad a \neq b.$$

Caso $a = b$:

$$y(t) = e^{-at} \int_0^t 1 d\tau = t e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

Quindi

$$y(t) = t e^{-at} u(t), \quad a = b.$$

b)

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}, \quad H(f) = \int_0^{\infty} e^{-(b+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{b + j2\pi f}.$$

c)

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}.$$

Caso $a \neq b$: scomposizione in fratti semplici

$$Y(f) = \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{b + j2\pi f} \right).$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \frac{1}{b - a} (e^{-at} - e^{-bt}) u(t), \quad a \neq b.$$

Caso $a = b$:

$$Y(f) = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2}.$$

Ora si usa la coppia nota

$$\mathcal{F}\{t e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2},$$

quindi

$$y(t) = t e^{-at} u(t), \quad a = b.$$

- d) I risultati coincidono nei due approcci. Inoltre il caso $a = b$ si può vedere come limite del caso $a \neq b$:

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} = t e^{-at}.$$

Esercizio 4. Convoluzione “a punti”: tri con somma di due rettangoli disgiunti

Sia

$$x(t) = \text{tri}(t), \quad g_1(t) = \text{rect}(t), \quad g_2(t) = \text{rect}(t - 2),$$

e sia

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t), \quad y(t) = (x * g)(t).$$

- a) Scrivere $y(t)$ come somma di due convoluzioni più semplici.
 b) Calcolare $y(0)$ e $y(1)$ *senza* trovare l'espressione completa di $y(t)$.

Svolgimento.

- a) Per linearità della convoluzione:

$$y(t) = (x * g)(t) = (x * (g_1 + g_2))(t) = (x * g_1)(t) + (x * g_2)(t).$$

- b) Poiché $g_1(t) = \text{rect}(t)$, si ha

$$(x * g_1)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(\tau) \text{rect}(t - \tau) d\tau.$$

La funzione $\text{rect}(t - \tau)$ vale 1 quando $|t - \tau| \leq \frac{1}{2}$, cioè per

$$\tau \in \left[t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} \right].$$

Quindi

$$(x * g_1)(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} \text{tri}(\tau) d\tau.$$

In particolare,

$$(x * g_1)(0) = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - |\tau|) d\tau = \frac{3}{4},$$

$$(x * g_1)(1) = \int_{1/2}^{3/2} \text{tri}(\tau) d\tau = \int_{1/2}^1 (1 - \tau) d\tau = \frac{1}{8}.$$

Ora consideriamo $g_2(t) = \text{rect}(t - 2)$. Allora

$$(x * g_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(\tau) \text{rect}(t - \tau - 2) d\tau.$$

La funzione $\text{rect}(t - \tau - 2)$ vale 1 quando

$$|t - \tau - 2| \leq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau \in \left[t - \frac{5}{2}, t - \frac{3}{2} \right].$$

Dunque

$$(x * g_2)(t) = \int_{t-5/2}^{t-3/2} \text{tri}(\tau) d\tau.$$

Per $t = 0$:

$$(x * g_2)(0) = \int_{-5/2}^{-3/2} \text{tri}(\tau) d\tau = 0,$$

perché $[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}]$ non interseca il supporto di tri , che è $[-1, 1]$.

Per $t = 1$:

$$(x * g_2)(1) = \int_{-3/2}^{-1/2} \text{tri}(\tau) d\tau = \int_{-1}^{-1/2} (1 + \tau) d\tau = \frac{1}{8}.$$

Quindi

$$y(0) = \frac{3}{4}, \quad y(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

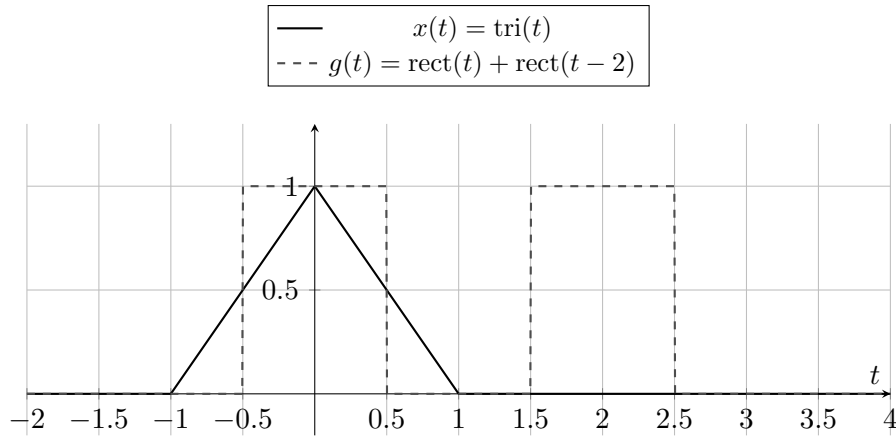


Figura 3: Segnali di ingresso: triangolo e somma di due finestre rettangolari disgiunte.

Esercizio 5. Parseval e convoluzione: da $\text{tri}(f) \text{rect}(f)$ a $\text{sinc}^2(t) * \text{sinc}(t)$

Considerare le coppie notevoli:

$$\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f), \quad \text{tri}(t) \leftrightarrow \text{sinc}^2(f).$$

Per dualità segue anche

$$\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f), \quad \text{sinc}^2(t) \leftrightarrow \text{tri}(f).$$

a) Usare Parseval per mostrare che

$$\langle \text{sinc}^2(t), \text{sinc}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^3(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(f) \text{rect}(f) df.$$

b) Scrivere esplicitamente il segnale in frequenza

$$z(f) = \text{tri}(f) \text{rect}(f)$$

e mostrare che può essere riscritto come

$$z(f) = \frac{1}{2} \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{tri}(2f).$$

c) Usare la proprietà “prodotto in frequenza $\leftrightarrow$ convoluzione nel tempo” per dedurre che

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}^2(t) * \text{sinc}(t)\} = z(f),$$

e quindi mostrare che

$$\boxed{\text{sinc}^2(t) * \text{sinc}(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(t) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

d) Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^3(t) dt.$$

Svolgimento.

a) Pongo

$$x(t) = \text{sinc}^2(t), \quad y(t) = \text{sinc}(t).$$

Per dualità:

$$X(f) = \text{tri}(f), \quad Y(f) = \text{rect}(f).$$

Per Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df.$$

Poiché i segnali sono reali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^3(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(f) \text{rect}(f) df.$$

b) Il prodotto

$$z(f) = \text{tri}(f) \text{rect}(f)$$

vale

$$z(f) = \begin{cases} 1 - |f|, & |f| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |f| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Inoltre, per $|f| \leq \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{tri}(2f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2|f|) = 1 - |f|,$$

mentre per $|f| > \frac{1}{2}$ entrambi i termini sono nulli. Quindi

$$\boxed{\text{tri}(f) \text{rect}(f) = \frac{1}{2} \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{tri}(2f)}.$$

c) Poiché

$$\text{sinc}^2(t) \leftrightarrow \text{tri}(f), \quad \text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f),$$

si ha

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}^2(t) * \text{sinc}(t)\} = \text{tri}(f) \text{rect}(f) = z(f).$$

Ora antitrasformo la decomposizione del punto (b):

$$z(f) = \frac{1}{2} \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{tri}(2f).$$

Per il secondo termine uso la proprietà di scala:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{tri}(2f)\} = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

In conclusione

$$\boxed{\text{sinc}^2(t) * \text{sinc}(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(t) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

d) Posso calcolare l'integrale nel dominio delle frequenze:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(f) \text{rect}(f) df = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - |f|) df = 2 \int_0^{1/2} (1 - f) df = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{4}.$$

Quindi

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^3(t) dt = \frac{3}{4}}.$$

$$\boxed{\text{--- } \frac{1}{2} \text{sinc}(t) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

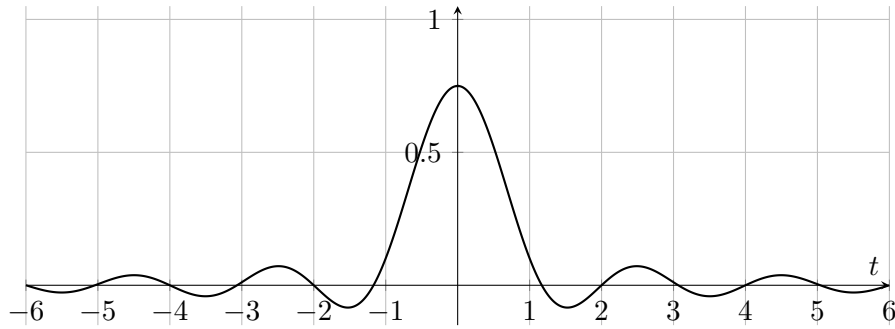


Figura 4: Segnale nel tempo ottenuto per antitrasformata: $\text{sinc}^2(t) * \text{sinc}(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(t) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

$$\begin{array}{l} \text{--- } \text{tri}(f) \text{rect}(f) \\ \text{--- } \frac{1}{2} \text{rect}(f) \\ \text{..... } \frac{1}{2} \text{tri}(2f) \end{array}$$

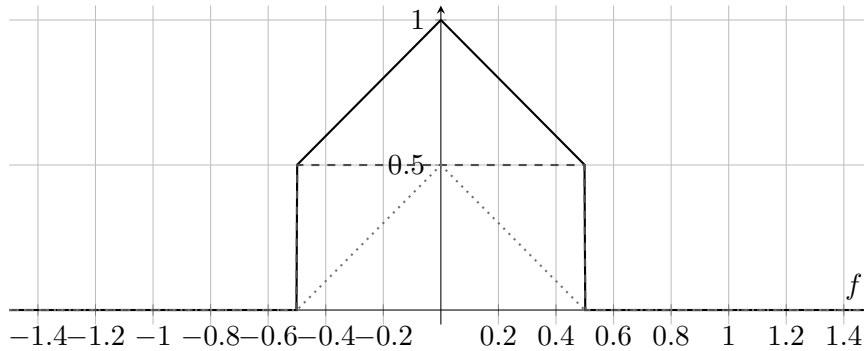


Figura 5: Nel dominio delle frequenze: $\text{tri}(f) \text{rect}(f) = \frac{1}{2} \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{tri}(2f)$.