

Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 4

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Convenzioni e notazione (valide per tutti gli esercizi).

- Trasformata di Fourier continua:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

- Per sistemi LTI:

$$y(t) = x(t) * h(t), \quad Y(f) = X(f) H(f).$$

- Parseval:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df.$$

Esercizio 1. Sinc traslati: ortonormalità e base per segnali limitati in banda

Per un fissato $T > 0$, definiamo

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si consideri il sottospazio dei segnali a banda limitata

$$\mathcal{B}_T = \left\{ x(t) : X(f) = 0 \text{ per } |f| > \frac{1}{2T} \right\}.$$

- Mostrare che $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è un insieme ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.
- Calcolare la trasformata di Fourier di $\phi_k(t)$.
- Spiegare perché $\{\phi_k\}$ costituisce una base ortonormale di $\mathcal{B}_T$.
- Mostrare che, per ogni $x \in \mathcal{B}_T$, i coefficienti dello sviluppo su questa base sono

$$c_k = \langle x, \phi_k \rangle = \sqrt{T} x(kT).$$

Svolgimento.

- Poiché

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T \operatorname{rect}(Tf),$$

per traslazione nel tempo e moltiplicazione per $1/\sqrt{T}$ si ha

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right) \implies \Phi_k(f) = \sqrt{T} \operatorname{rect}(Tf) e^{-j2\pi f kT}.$$

Allora, per Parseval,

$$\langle \phi_k, \phi_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(f) \Phi_m^*(f) df = T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} e^{-j2\pi f(k-m)T} df.$$

Se $k = m$, l'integrale vale

$$T \cdot \frac{1}{T} = 1.$$

Se $k \neq m$,

$$\langle \phi_k, \phi_m \rangle = T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} e^{-j2\pi f(k-m)T} df = \frac{\sin(\pi(k-m))}{\pi(k-m)} = 0.$$

Quindi

$$\boxed{\langle \phi_k, \phi_m \rangle = \delta_{km}}.$$

b) Come già trovato,

$$\boxed{\Phi_k(f) = \sqrt{T} \operatorname{rect}(Tf) e^{-j2\pi f k T}}.$$

c) Tutte le $\Phi_k(f)$ sono nulle fuori da

$$\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T} \right],$$

quindi $\phi_k \in \mathcal{B}_T$. Inoltre, sull'intervallo di frequenza $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$, le funzioni

$$e^{-j2\pi f k T}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

formano la base ortogonale naturale delle esponenziali complesse. Moltiplicando per la finestra $\operatorname{rect}(Tf)$ e il fattore $\sqrt{T}$, si ottiene una base ortonormale di $\mathcal{B}_T$. Dunque $\{\phi_k\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{B}_T$.

d) Se

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_k(t),$$

valutando in $t = mT$ otteniamo

$$x(mT) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}(m - k).$$

Poiché

$$\operatorname{sinc}(m - k) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

resta solo il termine $k = m$, quindi

$$x(mT) = \frac{c_m}{\sqrt{T}}.$$

Dunque

$$\boxed{c_k = \sqrt{T} x(kT)}.$$

Esercizio 2. Prodotto di due coseni nel tempo come convoluzione di delta in frequenza

Si consideri

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t), \quad y(t) = \cos(2\pi f_2 t),$$

e il loro prodotto

$$z(t) = x(t) y(t).$$

a) Calcolare $X(f)$ e $Y(f)$.

- b) Usare il fatto che il prodotto nel tempo corrisponde alla convoluzione in frequenza:

$$\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = X(f) * Y(f),$$

per trovare $Z(f)$.

- c) Antitrasformare e ricavare l'identità trigonometrica per $\cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$.

Svolgimento.

- a)

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)], \quad Y(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)].$$

- b) Convolvendo:

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f) * Y(f) \\ &= \frac{1}{4} [\delta(f - (f_1 + f_2)) + \delta(f - (f_1 - f_2)) + \delta(f + (f_1 - f_2)) + \delta(f + (f_1 + f_2))]. \end{aligned}$$

- c) Antitrasformando:

$$z(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t).$$

Cioè

$$\cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t).$$

Esercizio 3. Prodotti di coseni: frequenze che si sommano e delta spettrali

Si consideri il segnale

$$x_N(t) = \prod_{i=0}^{N-1} \cos(2\pi 2^i t).$$

- a) Usando

$$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)],$$

scrivere formalmente $\mathcal{F}\{x_N(t)\}$ come convoluzione di N coppie di delta.

- b) Mostrare che le sole delta che compaiono in uscita sono nelle frequenze

$$f = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(2^N - 1),$$

cioè in tutti e soli gli interi dispari compresi tra $-2^N + 1$ e $2^N - 1$.

- c) Mostrare che tutte queste delta hanno la stessa ampiezza e concludere che

$$\mathcal{F}\{x_N(t)\} = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{m=-(2^N-1) \\ m \text{ dispari}}}^{2^N-1} \delta(f - m).$$

- d) Antitrasformando, mostrare che $x_N(t)$ può essere scritto come somma di coseni:

$$x_N(t) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-1}-1} \cos(2\pi(2k+1)t).$$

e) Considerare ora il caso “frequenza fissa”

$$z_N(t) = (\cos(2\pi t))^N.$$

Calcolare $\mathcal{F}\{z_N(t)\}$ e discutere separatamente il caso N pari e il caso N dispari: quando compare la delta in zero?

Svolgimento.

a) Poiché il prodotto nel tempo corrisponde alla convoluzione in frequenza,

$$\mathcal{F}\{x_N(t)\} = \underset{i=0}{\overset{N-1}{*}} \left[\frac{1}{2} (\delta(f - 2^i) + \delta(f + 2^i)) \right].$$

Quindi

$$\mathcal{F}\{x_N(t)\} = \frac{1}{2^N} \underset{i=0}{\overset{N-1}{*}} (\delta(f - 2^i) + \delta(f + 2^i)).$$

b) Ogni convoluzione con $\delta(f - 2^i)$ sposta di $+2^i$, mentre con $\delta(f + 2^i)$ sposta di -2^i . Le frequenze possibili sono quindi tutte le somme

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i 2^i, \quad \sigma_i \in \{+1, -1\}.$$

Poiché

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad \dots, \quad 2^{N-1},$$

ogni somma di questo tipo è un intero dispari. Infatti

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i 2^i = \sigma_0 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i 2^{i-1},$$

quindi ha la stessa parità di $\sigma_0 = \pm 1$, cioè è dispari.

Inoltre il valore massimo si ottiene scegliendo tutti i segni $+$:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{N-1} = 2^N - 1,$$

e il minimo scegliendo tutti i segni $-$:

$$-(2^N - 1).$$

Dunque le frequenze possibili sono tutti e soli gli interi dispari compresi tra $-2^N + 1$ e $2^N - 1$.

c) Poiché le potenze di 2 danno una rappresentazione binaria univoca, ogni intero dispari nell'intervallo

$$-(2^N - 1), \dots, 2^N - 1$$

si ottiene in un solo modo come somma

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i 2^i.$$

Quindi ogni delta compare una sola volta, con coefficiente uguale a

$$\frac{1}{2^N}.$$

Ne segue

$$\boxed{\mathcal{F}\{x_N(t)\} = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{m=-(2^N-1) \\ m \text{ dispari}}}^{2^N-1} \delta(f - m)}.$$

- d) Nello spettro compaiono coppie simmetriche $\pm m$, tutte con la stessa ampiezza $1/2^N$. Raggruppando le coppie $\delta(f - m) + \delta(f + m)$, l'antitrasformata di ciascuna coppia è

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2^N} [\delta(f - m) + \delta(f + m)] \right\} = \frac{1}{2^{N-1}} \cos(2\pi m t).$$

Poiché gli interi dispari positivi compresi tra 1 e $2^N - 1$ sono $1, 3, 5, \dots, 2^N - 1$, possiamo scrivere

$$x_N(t) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{2^{N-1}-1} \cos(2\pi(2k+1)t).$$

- e) Consideriamo $z_N(t) = (\cos(2\pi t))^N$. Abbiamo,

$$\cos(2\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - 1) + \delta(f + 1)].$$

Quindi

$$\mathcal{F}\{z_N(t)\} = \underbrace{\left[\frac{1}{2} (\delta(f - 1) + \delta(f + 1)) \right] * \dots * \left[\frac{1}{2} (\delta(f - 1) + \delta(f + 1)) \right]}_{N \text{ volte}}.$$

Le frequenze possibili sono ora

$$f = N - 2k, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

e il numero di modi in cui si ottiene $N - 2k$ è $\binom{N}{k}$. Dunque

$$\mathcal{F}\{(\cos(2\pi t))^N\} = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \delta(f - (N - 2k)).$$

Se N è pari, esiste $k = N/2$, quindi compare la delta in zero, con ampiezza $\frac{1}{2^N} \binom{N}{N/2}$. Se N è dispari, la delta in zero non compare.

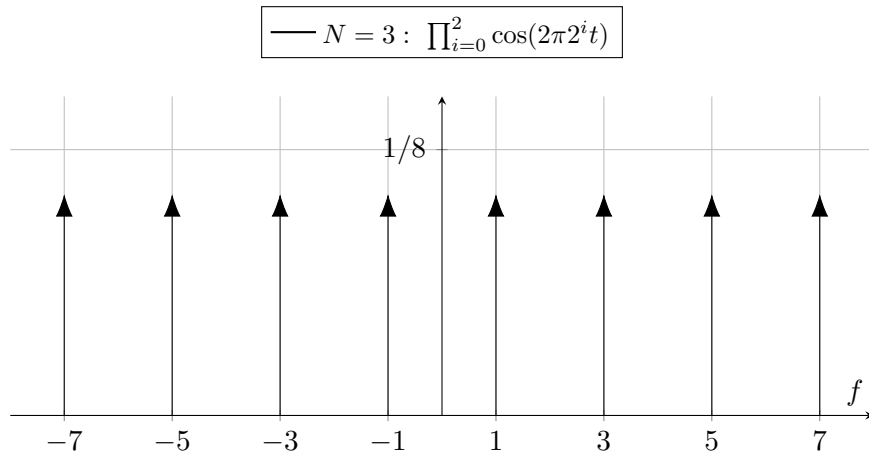


Figura 1: Esempio per $N = 3$: compaiono tutte e sole le frequenze dispari tra -7 e 7 , tutte con la stessa ampiezza $1/8$.

Esercizio 4. Convoluzione di due gaussiane tramite trasformata di Fourier

Siano $a > 0$, $b > 0$ e

$$x(t) = e^{-\pi a t^2}, \quad y(t) = e^{-\pi b t^2}.$$

Si consideri

$$z(t) = (x * y)(t).$$

a) Richiamare la trasformata di Fourier della gaussiana

$$\mathcal{F}\{e^{-\pi a t^2}\}(f) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi \frac{f^2}{a}}$$

e quindi calcolare $X(f)$ e $Y(f)$.

b) Usare la proprietà $Z(f) = X(f)Y(f)$ per scrivere $Z(f)$.

c) Antitrasformare $Z(f)$ e mostrare che la convoluzione di due gaussiane è ancora una gaussiana.

d) Specializzare il risultato al caso $a = b = 1$.

Svolgimento.

a) Dalla formula nota per la gaussiana:

$$X(f) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi \frac{f^2}{a}}, \quad Y(f) = \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\pi \frac{f^2}{b}}.$$

b) Il prodotto in frequenza vale

$$Z(f) = X(f)Y(f) = \frac{1}{\sqrt{ab}} e^{-\pi \frac{f^2}{a}} e^{-\pi \frac{f^2}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} e^{-\pi f^2 (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}.$$

Poiché

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab},$$

si può scrivere

$$Y(f) = \frac{1}{\sqrt{ab}} e^{-\pi \frac{a+b}{ab} f^2}.$$

c) Uso ora la formula inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\pi c f^2}\right\}(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\pi \frac{t^2}{c}}, \quad c > 0.$$

Qui

$$c = \frac{a+b}{ab}.$$

Quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\pi \frac{t^2}{c}}.$$

Dunque

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Inoltre

$$\frac{1}{c} = \frac{ab}{a+b}.$$

Pertanto

$$z(t) = (x * y)(t) = \frac{1}{\sqrt{a+b}} e^{-\pi \frac{ab}{a+b} t^2}.$$

Quindi la convoluzione di due gaussiane è ancora una gaussiana.

d) Se $a = b = 1$, allora

$$x(t) = y(t) = e^{-\pi t^2},$$

e la formula generale diventa

$$z(t) = (x * y)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2} t^2}.$$

Quindi

$$e^{-\pi t^2} * e^{-\pi t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2} t^2}.$$

$$\begin{array}{l} \text{---} x(t) = y(t) = e^{-\pi t^2} \\ \text{---} z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2} t^2} \end{array}$$

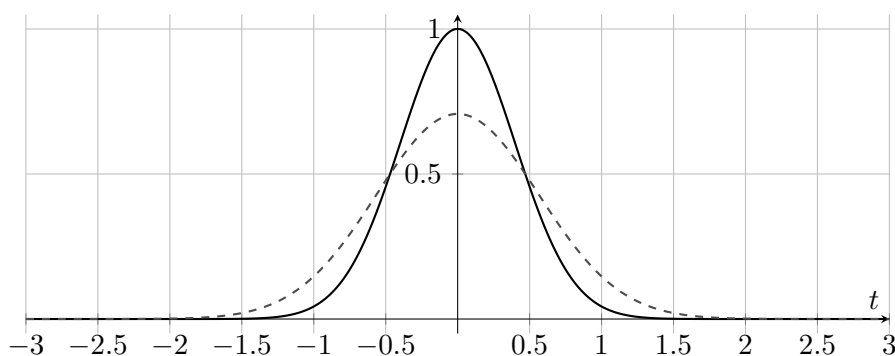


Figura 2: Convoluzione di due gaussiane identiche: il risultato è ancora una gaussiana, più larga.

Esercizio 5. Filtro ideale passa-basso: effetto su somme di sinusoidi e di sinc

Si consideri il sistema LTI con risposta in frequenza

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right),$$

cioè un filtro ideale passa-basso con banda $|f| \leq 1$.

- Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$.
- Determinare l'uscita $y_1(t)$ quando l'ingresso è

$$x_1(t) = 1 + \cos(\pi t) + 2 \cos(3\pi t).$$

- Determinare l'uscita $y_2(t)$ quando l'ingresso è

$$x_2(t) = \text{sinc}(t) + 2 \text{sinc}(4t).$$

- Usare Parseval per calcolare l'energia di $y_2(t)$.

Svolgimento.

a) Poiché

$$\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \leftrightarrow 2 \text{sinc}(2t),$$

si ha

$$\boxed{h(t) = 2 \text{sinc}(2t)}.$$

b) Lo spettro dell'ingresso vale

$$X_1(f) = \delta(f) + \frac{1}{2} [\delta(f - \frac{1}{2}) + \delta(f + \frac{1}{2})] + [\delta(f - \frac{3}{2}) + \delta(f + \frac{3}{2})].$$

Il filtro lascia passare le frequenze a $f = 0$ e $f = \pm \frac{1}{2}$, ma sopprime quelle a $f = \pm \frac{3}{2}$.
Dunque

$$Y_1(f) = \delta(f) + \frac{1}{2} [\delta(f - \frac{1}{2}) + \delta(f + \frac{1}{2})].$$

Antitrasformando:

$$\boxed{y_1(t) = 1 + \cos(\pi t)}.$$

c) Per dualità e scala:

$$\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f), \quad \text{sinc}(4t) \leftrightarrow \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right).$$

Quindi

$$X_2(f) = \text{rect}(f) + 2 \cdot \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) = \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right).$$

Moltiplicando per il filtro:

$$Y_2(f) = H(f)X_2(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right).$$

Poiché

$$\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \text{rect}(f) = \text{rect}(f), \quad \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right),$$

si ottiene

$$Y_2(f) = \text{rect}(f) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right).$$

Antitrasformando:

$$\boxed{y_2(t) = \text{sinc}(t) + \text{sinc}(2t)}.$$

d) Per Parseval:

$$\|y_2\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |Y_2(f)|^2 df.$$

Ora

$$Y_2(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & |f| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < |f| \leq 1, \\ 0, & |f| > 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\|y_2\|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

Dunque

$$\boxed{\|y_2\|^2 = \frac{5}{2}}.$$

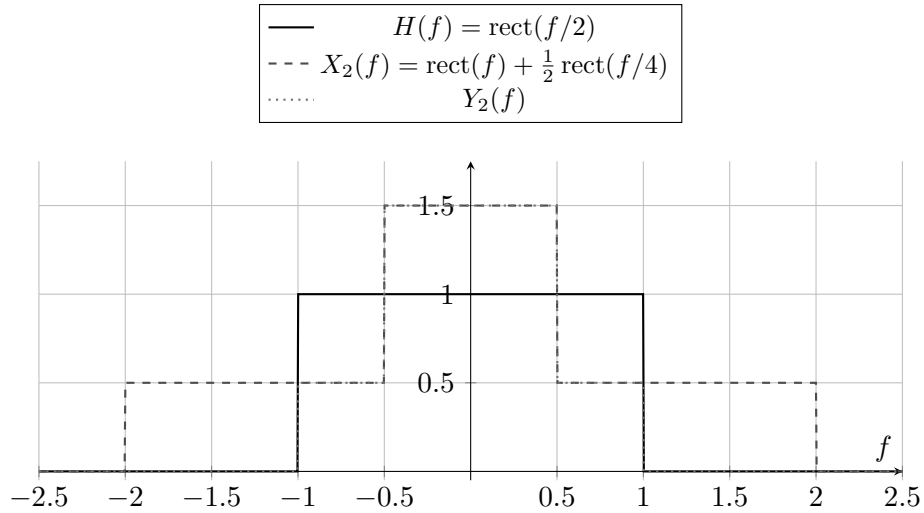


Figura 3: Filtro ideale e azione sullo spettro dell'ingresso $x_2(t)$.

Esercizio 6. Sistema LTI con $h(t) = \text{sinc}^2(t) \cos(2\pi t)$

Si consideri il sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = \text{sinc}^2(t) \cos(2\pi t).$$

- Calcolare la risposta in frequenza $H(f)$.
- Mostrare che $H(f)$ può essere scritta sia come somma di due triangoli traslati sia come differenza di due triangoli centrati:

$$H(f) = \frac{1}{2} \text{tri}(f-1) + \frac{1}{2} \text{tri}(f+1) \quad \text{e} \quad H(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f).$$

- Dire se il sistema è causale e se è stabile.
- Determinare l'uscita quando in ingresso si ha

$$x(t) = \text{sinc}(2t)e^{j2\pi t} + \cos(\pi t) + \sin(6\pi t).$$

- Commentare qualitativamente il ruolo del filtro sui tre contributi dell'ingresso.

Svolgimento.

- Si usano le coppie notevoli

$$\text{sinc}^2(t) \leftrightarrow \text{tri}(f), \quad \cos(2\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f-1) + \delta(f+1)].$$

Poiché il prodotto nel tempo corrisponde alla convoluzione in frequenza,

$$H(f) = \text{tri}(f) * \frac{1}{2} [\delta(f-1) + \delta(f+1)] = \frac{1}{2} \text{tri}(f-1) + \frac{1}{2} \text{tri}(f+1).$$

- Mostro ora che questa somma coincide con

$$\text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f).$$

Infatti:

- per $|f| > 2$, entrambi i membri valgono 0;
- per $1 \leq |f| \leq 2$, vale $\text{tri}(f) = 0$ e

$$\text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f) = 1 - \frac{|f|}{2};$$

inoltre in questa regione sopravvive solo uno dei due triangoli traslati e si ottiene proprio

$$\frac{1}{2}(2 - |f|) = 1 - \frac{|f|}{2};$$

- per $|f| \leq 1$,

$$\text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f) = \left(1 - \frac{|f|}{2}\right) - (1 - |f|) = \frac{|f|}{2}.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{2} \text{tri}(f - 1) + \frac{1}{2} \text{tri}(f + 1) = \frac{|f|}{2}.$$

Quindi

$$H(f) = \frac{1}{2} \text{tri}(f - 1) + \frac{1}{2} \text{tri}(f + 1) = \text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f).$$

c) Il sistema non è causale, perché $h(t) = \text{sinc}^2(t) \cos(2\pi t)$ non è nullo per $t < 0$.

Il sistema è invece stabile, perché $h(t)$ è assolutamente integrabile:

$$|h(t)| \leq \text{sinc}^2(t),$$

e $\text{sinc}^2(t)$ è integrabile su $\mathbb{R}$.

d) Calcolo lo spettro dell'ingresso.

Per il primo termine, per scala e traslazione in frequenza:

$$\text{sinc}(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right),$$

quindi

$$\text{sinc}(2t)e^{j2\pi t} \leftrightarrow \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f-1}{2}\right).$$

Per il coseno:

$$\mathcal{F}\{\cos(\pi t)\} = \frac{1}{2} [\delta(f - \frac{1}{2}) + \delta(f + \frac{1}{2})].$$

Per il seno:

$$\mathcal{F}\{\sin(6\pi t)\} = \frac{1}{2j} [\delta(f - 3) - \delta(f + 3)].$$

Dunque

$$X(f) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f-1}{2}\right) + \frac{1}{2} [\delta(f - \frac{1}{2}) + \delta(f + \frac{1}{2})] + \frac{1}{2j} [\delta(f - 3) - \delta(f + 3)].$$

Ora multiplico per $H(f)$.

Primo contributo. Poiché $\text{rect}(\frac{f-1}{2})$ ha supporto $[0, 2]$, seleziona soltanto il triangolo centrato in $f = 1$. Quindi

$$H(f) \cdot \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f-1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{tri}(f - 1).$$

Antitrasformando:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{4} \text{tri}(f-1)\right\} = \frac{1}{4} \text{sinc}^2(t)e^{j2\pi t}.$$

Secondo contributo. Le delta del coseno stanno in $f = \pm\frac{1}{2}$, che appartiene al supporto del filtro. Vale

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \text{tri}\left(\frac{1}{4}\right) - \text{tri}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Per simmetria $H(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Quindi il coseno viene lasciato passare con ampiezza ridotta di un fattore 1/4:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} [\delta(f - \frac{1}{2}) + \delta(f + \frac{1}{2})]\right\} = \frac{1}{4} \cos(\pi t).$$

Terzo contributo. Le delta del seno sono a $f = \pm 3$, fuori dal supporto del filtro ($H(f) = 0$ per $|f| > 2$), quindi questo contributo viene completamente tagliato.

Sommando:

$$y(t) = \frac{1}{4} \text{sinc}^2(t)e^{j2\pi t} + \frac{1}{4} \cos(\pi t).$$

e) Il filtro agisce così:

- sul termine $\text{sinc}(2t)e^{j2\pi t}$, la finestra in frequenza ha supporto $[0, 2]$ e seleziona solo il triangolo centrato in $f = 1$, lasciando in uscita $\frac{1}{4} \text{tri}(f-1)$, cioè $\frac{1}{4} \text{sinc}^2(t)e^{j2\pi t}$;
- il coseno a frequenza $1/2$ passa, ma con ampiezza modificata da $H(\pm\frac{1}{2}) = 1/4$;
- il seno a frequenza 3 viene completamente tagliato, perché le sue delta stanno fuori dal supporto del filtro.

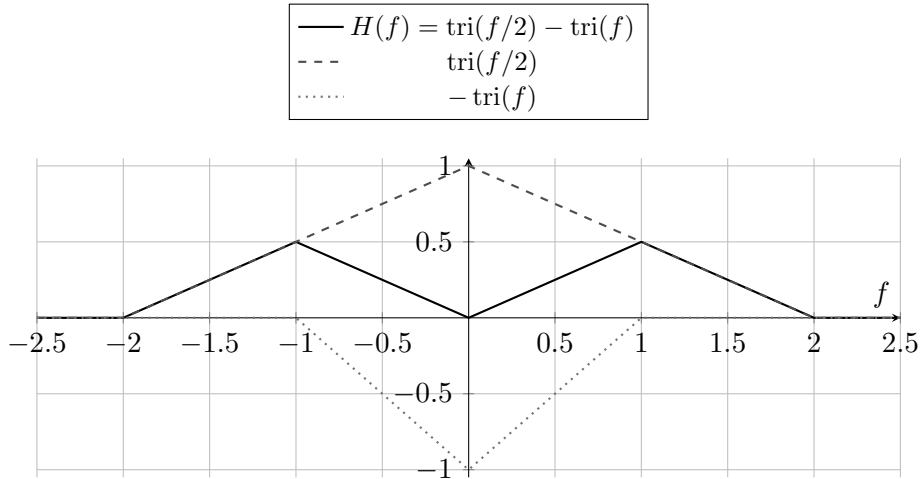


Figura 4: Risposta in frequenza del sistema come differenza tra $\text{tri}(f/2)$ e $\text{tri}(f)$.

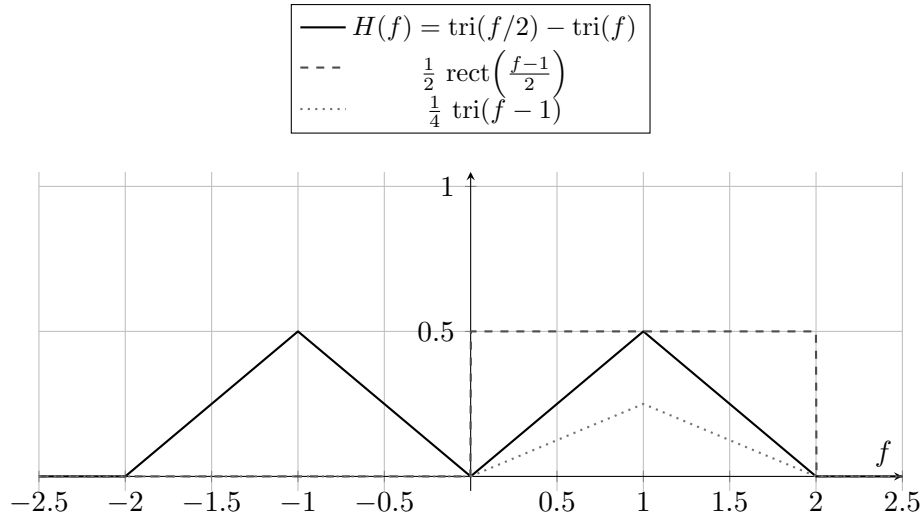


Figura 5: Finestratura del primo contributo di ingresso: $\frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f-1}{2}\right)$ seleziona solo il triangolo centrato in $f = 1$, producendo $\frac{1}{4} \text{tri}(f - 1)$.

Esercizio 7. Sistema lineare tempo-invariante: finestra mobile di ampiezza 1

Si consideri il sistema

$$y(t) = S[x](t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau.$$

- Dire se il sistema è lineare.
- Dire se il sistema è tempo-invariante.
- Dire se il sistema è causale.
- Dire se il sistema è stabile.
- Mostrare che il sistema può essere scritto come convoluzione

$$y(t) = (x * h)(t)$$

con una opportuna risposta impulsiva $h(t)$, e determinarla.

- Calcolare l'uscita quando l'ingresso è

$$x(t) = \delta(t - 3) + 2 \text{u}\left(-\frac{t}{2}\right) + \cos^2(2\pi t).$$

Svolgimento.

- Il sistema è lineare, perché l'integrale è un operatore lineare:

$$S[\alpha x_1 + \beta x_2](t) = \int_{t-1}^t (\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)) d\tau = \alpha S[x_1](t) + \beta S[x_2](t).$$

- Il sistema è tempo-invariante. Infatti

$$S[x(t - t_0)](t) = \int_{t-1}^t x(\tau - t_0) d\tau.$$

Con il cambio di variabile $\lambda = \tau - t_0$,

$$S[x(t - t_0)](t) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda = S[x](t - t_0).$$

- c) Il sistema è causale, perché l'uscita al tempo t dipende solo dai valori di ingresso nell'intervallo

$$[t-1, t].$$

- d) Il sistema è stabile. Se $|x(t)| \leq M$, allora

$$|y(t)| = \left| \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t-1}^t |x(\tau)| d\tau \leq \int_{t-1}^t M d\tau = M.$$

- e) Scrivendo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \operatorname{rect}\left(t - \tau - \frac{1}{2}\right) d\tau,$$

si riconosce la convoluzione

$$y(t) = (x * h)(t)$$

con

$$h(t) = \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

- f) L'ingresso si scrive come

$$x(t) = \delta(t-3) + 2 u(-t) + \cos^2(2\pi t).$$

Tratto separatamente i tre contributi.

Primo contributo (delta):

$$\int_{t-1}^t \delta(\tau-3) d\tau$$

vale 1 se $3 \in [t-1, t]$, cioè se $3 \leq t \leq 4$, e 0 altrove. Quindi

$$y_1(t) = \operatorname{rect}\left(t - \frac{7}{2}\right).$$

Secondo contributo (gradino verso sinistra):

$$y_2(t) = 2 \int_{t-1}^t u(-\tau) d\tau.$$

Questo contributo misura 2 volte la lunghezza della parte dell'intervallo $[t-1, t]$ che cade a sinistra di 0. Dunque

$$y_2(t) = \begin{cases} 2, & t < 0, \\ 2(1-t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Terzo contributo ($\cos^2$): $\cos^2(2\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi t)$, quindi

$$\mathcal{F}\{\cos^2(2\pi t)\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{4} \delta(f-2) + \frac{1}{4} \delta(f+2).$$

La risposta in frequenza del sistema vale

$$H(f) = \mathcal{F}\left\{\operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right\} = e^{-j\pi f} \operatorname{sinc}(f).$$

Allora $Y_3(f) = H(f) X_3(f)$. Ora

$$H(0) = 1, \quad H(\pm 2) = e^{\mp j 2\pi} \text{sinc}(2) = 0,$$

quindi $Y_3(f) = \frac{1}{2} \delta(f)$. Antitrasformando:

$$y_3(t) = \frac{1}{2}.$$

Sommando i tre contributi:

$$y(t) = \text{rect}\left(t - \frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} + \begin{cases} 2, & t < 0, \\ 2(1-t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

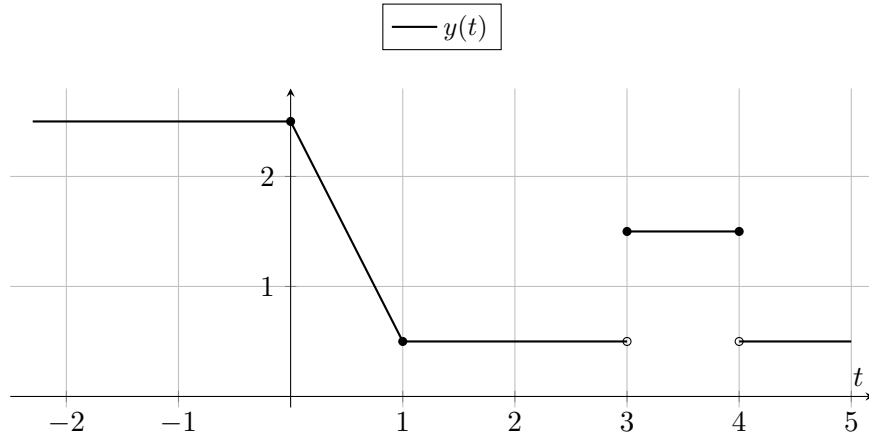


Figura 6: Uscita del sistema $y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$ per $x(t) = \delta(t-3) + 2 u(-t/2) + \cos^2(2\pi t)$.