Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 5

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica

A.A. 2025–2026

Convenzioni e notazione (valide per tutti gli esercizi).

- Campionamento ideale con periodo T_s e frequenza $f_s = 1/T_s$:

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t - nT_s), \qquad X_s(f) = f_s X(f) * \delta_{f_s}(f) = f_s \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f - kf_s).$$

- Interpolatore ideale per ricostruzione perfetta (in assenza di aliasing):

$$H_{\text{id}}(f) = T_s \,\text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right).$$

Esercizio 1. Campionamento di $x(t) = \text{sinc}(2t)\,\text{sinc}(4t)$

Si consideri

$$x(t) = \text{sinc}(2t)\ \text{sinc}(4t).$$

a) Calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$.

b) Determinare la frequenza minima di campionamento $f_{s,\min}$ che assicura ricostruzione perfetta.

c) Spiegare perché, in questo caso, si può scegliere anche

$$f_s = f_{s,\min} = 6$$

e non è necessario imporre $f_s > 6$.

d) Nel caso $f_s = 6$, scrivere l'interpolatore ideale $H_{\text{id}}(f)$ e la corrispondente risposta impulsiva $h_{\text{id}}(t)$.

e) Studiare l'aliasing quando $f_s = 5$. Determinare lo spettro ricostruito idealmente e mostrare che non coincide con $X(f)$.

Svolgimento.

a) Per scala:

$$\text{sinc}(2t) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{2}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right), \qquad \text{sinc}(4t) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{4}\,\text{rect}\left(\frac{f}{4}\right).$$

Il prodotto nel tempo diventa convoluzione in frequenza:

$$X(f) = \frac{1}{2}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) * \frac{1}{4}\,\text{rect}\left(\frac{f}{4}\right).$$

La convoluzione di due rettangoli di larghezza 2 e 4 dà un trapezio:

$$X(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & |f| \le 1, \\ \dfrac{3 - |f|}{8}, & 1 \le |f| \le 3, \\ 0, & |f| > 3. \end{cases}$$

Quindi il supporto di $X(f)$ è $[-3, 3]$.

b) La banda vale
$$B = 3.$$
Dunque la frequenza di Nyquist è
$$\boxed{f_{s,\min} = 2B = 6}.$$

c) In questo caso si può prendere anche $f_s = 6$, perché le repliche spettrali si toccano solo nei punti
$$f = \pm 3,$$
dove però
$$X(\pm 3) = 0.$$
Quindi non c'è sovrapposizione tra valori non nulli dello spettro.

d) Se $f_s = 6$, allora
$$T_s = \frac{1}{6}.$$
L'interpolatore ideale è
$$H_{\mathrm{id}}(f) = T_s \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = \frac{1}{6} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{6}\right).$$
Per antitrasformata:
$$h_{\mathrm{id}}(t) = \operatorname{sinc}(6t).$$
Quindi
$$\boxed{H_{\mathrm{id}}(f) = \frac{1}{6} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{6}\right), \qquad h_{\mathrm{id}}(t) = \operatorname{sinc}(6t)}.$$

e) Se $f_s = 5$, allora
$$X_s(f) = 5 \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - 5k).$$
C'è aliasing perché
$$f_s = 5 < 6 = 2B.$$
Nell'intervallo fondamentale $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ contribuiscono la copia centrale e le due copie adiacenti:
$$X_s(f) = 5\big(X(f) + X(f-5) + X(f+5)\big).$$
Dopo il filtraggio ideale con
$$H_{\mathrm{id}}(f) = \frac{1}{5} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{5}\right),$$
lo spettro ricostruito vale
$$Y(f) = X(f) + X(f-5) + X(f+5), \qquad |f| \le \frac{5}{2}.$$
Calcolando esplicitamente:
$$Y(f) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |f| \le 1, \\ \frac{3-|f|}{8}, & 1 \le |f| \le 2, \\ \frac{1}{8}, & 2 \le |f| \le \frac{5}{2}, \\ 0, & |f| > \frac{5}{2}, \end{cases}$$

che si può riscrivere come

$$Y(f) = \frac{1}{8}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{5}\right) + \frac{1}{8}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right) * \mathrm{rect}(f)\right].$$

Infatti il primo termine fornisce il livello costante $1/8$ su $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$, mentre il secondo termine è un trapezio con supporto $[-2, 2]$, plateau su $[-1, 1]$ e altezza $1/8$.

Antitrasformando:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{5}\right) \longleftrightarrow 5\,\mathrm{sinc}(5t), \qquad \mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right) \longleftrightarrow 3\,\mathrm{sinc}(3t), \qquad \mathrm{rect}(f) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(t).$$

Poiché la convoluzione in frequenza diventa prodotto nel tempo, otteniamo

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{8}\,\mathrm{sinc}(5t) + \frac{3}{8}\,\mathrm{sinc}(3t)\,\mathrm{sinc}(t).}$$

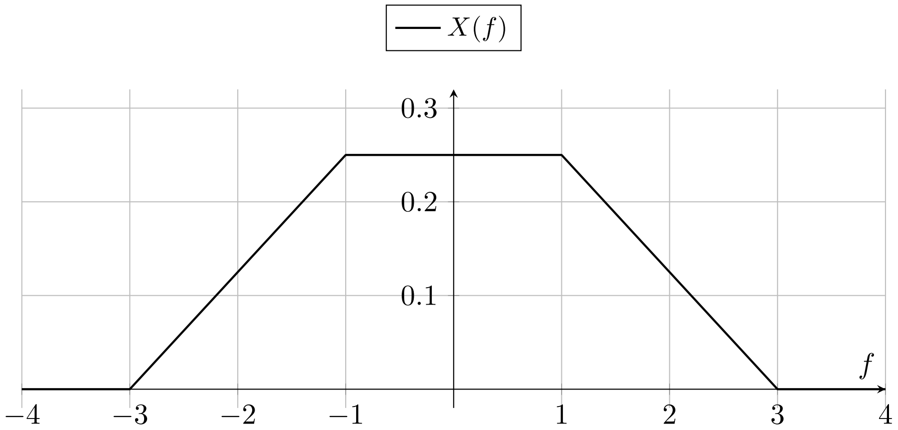


Figura 1: Spettro di $x(t) = \mathrm{sinc}(2t)\,\mathrm{sinc}(4t)$: trapezio con supporto in $[-3, 3]$.

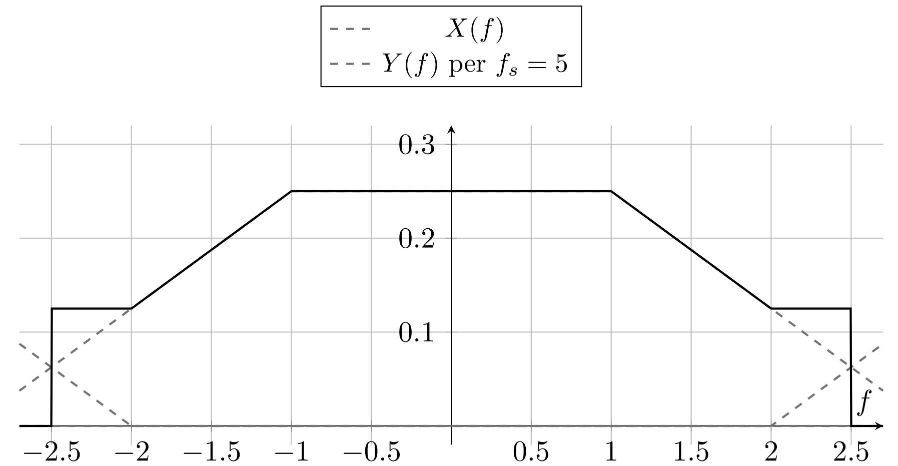


Figura 2: Caso aliasato $f_s = 5$: dopo filtraggio ideale si ottiene uno spettro ricostruito $Y(f)$ diverso da $X(f)$.

Esercizio 2. Campionamento critico di una sinusoide con fase

Si consideri il segnale

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi), \qquad A > 0.$$

Si campioni il segnale con frequenza critica

$$f_s = 2f_0, \qquad T_s = \frac{1}{2f_0}.$$

a) Calcolare i campioni

$$x[n] = x(nT_s).$$

b) Usare la formula

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

per mostrare che la sequenza campionata dipende solo da $A\cos\phi$.

c) Discutere per quali valori di ϕ i campioni determinano univocamente il segnale originale.

d) Studiare il problema anche nel dominio delle frequenze:

i) calcolare $X(f)$;

ii) calcolare lo spettro campionato $X_s(f)$;

iii) mostrare che, nella banda fondamentale $[-f_0, f_0]$, le repliche si sovrappongono e che il segnale ricostruito idealmente vale

$$y(t) = A\cos\phi\,\cos(2\pi f_0 t).$$

Svolgimento.

a) Poiché

$$T_s = \frac{1}{2f_0},$$

si ha

$$x[n] = A\cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0} + \phi\right) = A\cos(\pi n + \phi).$$

b) Applicando la formula trigonometrica:

$$x[n] = A\big(\cos(\pi n)\cos\phi - \sin(\pi n)\sin\phi\big).$$

Ma

$$\cos(\pi n) = (-1)^n, \qquad \sin(\pi n) = 0,$$

quindi

$$\boxed{x[n] = A\cos\phi\,(-1)^n}.$$

La parte con il seno scompare completamente.

c) La sequenza campionata dipende solo dal prodotto $A\cos\phi$. Quindi, in generale, i campioni non determinano univocamente il segnale originale: fasi diverse possono produrre la stessa sequenza.

Se A è fissata e nota, i campioni permettono di ricostruire $\cos\phi$, ma non necessariamente ϕ, perché

$$\cos\phi = \cos(-\phi).$$

L'unicità si ha solo quando il segnale coincide con il suo simmetrico rispetto alla fase, cioè per

$$\boxed{\phi = m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z}}.$$

In questi casi

$$x(t) = \pm A\cos(2\pi f_0 t)$$

ed i campioni determinano il segnale in modo univoco.

In particolare, se

$$\phi = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

allora

$$\cos\phi = 0$$

e tutti i campioni sono nulli, pur avendo un segnale continuo non nullo.

d) Studio nel dominio delle frequenze.

   i) Scrivo il segnale come somma di due esponenziali complessi:

   $$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0 t}.$$

   Quindi

   $$\boxed{X(f) = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\,\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\,\delta(f + f_0)}.$$

   ii) Il campionamento ideale produce

   $$X_s(f) = f_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - nf_s).$$

   Con $f_s = 2f_0$,

   $$X_s(f) = \frac{Af_s}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\,\delta(f - f_0 - 2nf_0) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\,\delta(f + f_0 - 2nf_0)\right].$$

   Le righe spettrali compaiono quindi in tutte le frequenze dispari multiple di f_0:

   $$\dots, -3f_0, -f_0, f_0, 3f_0, \dots$$

   iii) Nella banda fondamentale $[-f_0, f_0]$ si ha sovrapposizione ai bordi $f = \pm f_0$.
   In $f = f_0$ contribuiscono:

   $$\frac{Af_s}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\delta(f - f_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{Af_s}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\delta(f - f_0),$$

   quindi il coefficiente totale in $f = f_0$ è

   $$\frac{Af_s}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\right) = Af_s\cos\phi.$$

   Analogamente, in $f = -f_0$ si ottiene ancora $Af_s\cos\phi$. Dunque nella banda fondamentale:

   $$X_s(f) = Af_s\cos\phi\,[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

   Ora assumo l'interpolatore ideale

   $$H_{\mathrm{id}}(f) = T_s\ \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right).$$

Assumendo la convenzione di bordo $\mathrm{rect}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, le delta in $f = \pm f_0 = \pm f_s/2$ vengono moltiplicate per $1/2$. Quindi

$$Y(f) = H_{\mathrm{id}}(f)X_s(f) = T_s \cdot \frac{1}{2} \cdot Af_s \cos\phi \,[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

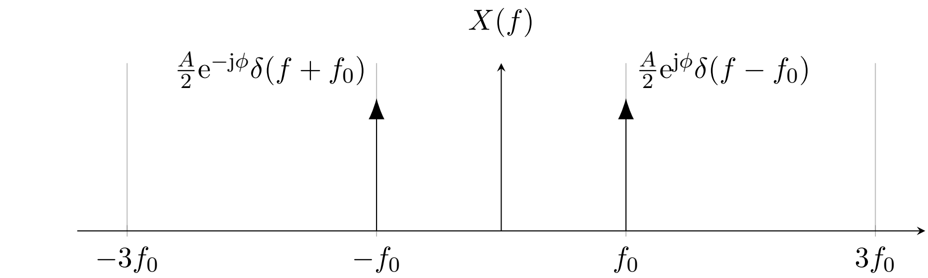
Poiché $T_s f_s = 1$, si ottiene

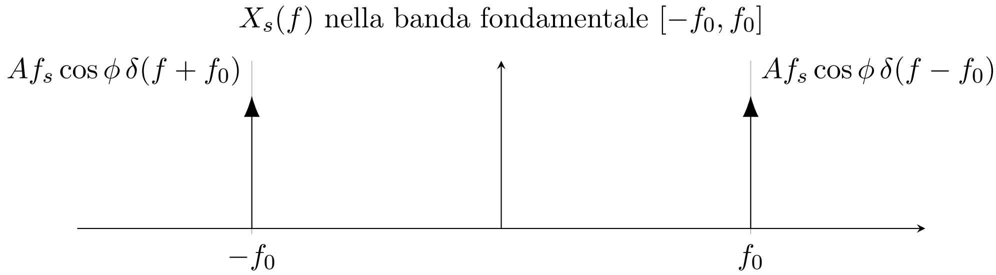
$$Y(f) = \frac{A\cos\phi}{2}\,[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Antitrasformando:

$$\boxed{y(t) = A\cos\phi\,\cos(2\pi f_0 t)}.$$

Questo conferma quanto trovato nel dominio del tempo: al campionamento critico sopravvive solo il termine proporzionale a $\cos\phi$, mentre l'informazione contenuta in $\sin\phi$ si perde.





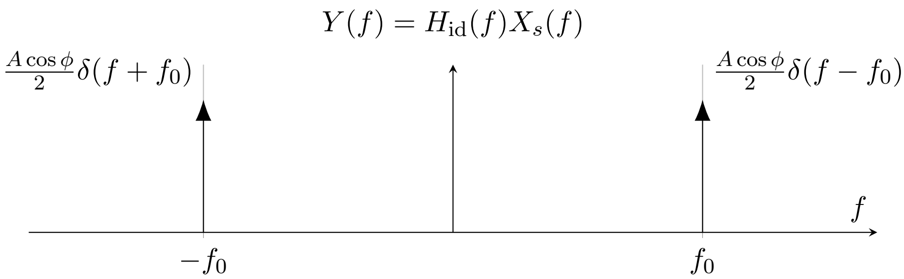


Figura 3: Studio in frequenza del campionamento critico: le due righe originarie si replicano, si sovrappongono in banda fondamentale e, dopo ricostruzione ideale, sopravvive solo il termine proporzionale a $\cos\phi$.

Esercizio 3. Campionamento di $x(t) = \text{sinc}^{26}(t)$

Si consideri
$$x(t) = \text{sinc}^{26}(t).$$

a) Determinare il supporto di $X(f)$.

b) Calcolare la frequenza minima di campionamento che assicura ricostruzione perfetta.

c) Dire se in questo caso si può prendere f_s uguale esattamente alla frequenza di Nyquist.

Svolgimento.

a) Poiché
$$\text{sinc}(t) \;\leftrightarrow\; \text{rect}(f),$$
il prodotto
$$\text{sinc}^{26}(t)$$
diventa in frequenza la convoluzione di 26 rettangoli:
$$X(f) = \underbrace{\text{rect}(f) * \text{rect}(f) * \cdots * \text{rect}(f)}_{26 \text{ volte}}.$$
Ogni convoluzione con $\text{rect}(f)$, che ha supporto in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, allarga il supporto di 1. Dunque il supporto finale è
$$\boxed{\text{supp}\, X(f) \subseteq [-13, 13]}.$$

b) La banda vale quindi
$$B = 13,$$
e la frequenza minima di Nyquist è
$$\boxed{f_{s,\min} = 2B = 26}.$$

c) Sì, in questo caso si può prendere anche
$$f_s = 26.$$
$$X(\pm 13) = 0,$$
perché si tratta di una convoluzione ripetuta di rettangoli, le repliche si toccano solo in punti dove lo spettro vale zero.

Esercizio 4. Periodicità della sequenza campionata: rapporto razionale e irrazionale

Si consideri il segnale sinusoidale
$$x(t) = \cos(2\pi t).$$

a) Campionare il segnale con periodo
$$T_s = 2$$
e mostrare che la sequenza campionata $x[n]$ è periodica.

b) Campionare il segnale con periodo
$$T_s = \sqrt{2}$$
e mostrare che la sequenza campionata non è periodica.

c) Formulare la condizione generale di periodicità della sequenza campionata di un coseno.

Svolgimento.

a) Con $T_s = 2$,

$$x[n] = x(nT_s) = \cos(2\pi \cdot 2n) = \cos(4\pi n) = 1.$$

Quindi la sequenza campionata è costante e dunque periodica (ad esempio di periodo $N = 1$):

$$\boxed{x[n] = 1}.$$

b) Con $T_s = \sqrt{2}$,

$$x[n] = x(nT_s) = \cos(2\pi\sqrt{2}\,n).$$

Se la sequenza fosse periodica, esisterebbe un intero $N > 0$ tale che

$$x[n+N] = x[n] \qquad \forall n.$$

Questo richiederebbe

$$2\pi\sqrt{2}\,N = 2\pi m \qquad \text{per qualche } m \in \mathbb{Z},$$

cioè $\sqrt{2}\,N = m$. Ma questo è impossibile, perché $\sqrt{2}$ è irrazionale. Quindi la sequenza non è periodica:

$$\boxed{x[n] = \cos(2\pi\sqrt{2}\,n) \text{ non è periodica.}}$$

c) In generale, se $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, allora la sequenza campionata è

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 T_s\, n + \phi).$$

Questa sequenza è periodica se e solo se $f_0 T_s \in \mathbb{Q}$, cioè se e solo se il rapporto tra frequenza del segnale e frequenza di campionamento è razionale.

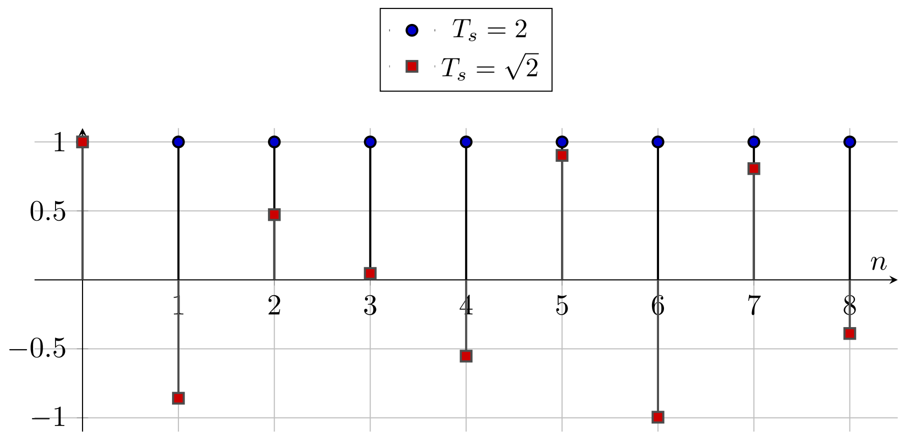


Figura 4: Con $T_s = 2$ la sequenza campionata è periodica; con $T_s = \sqrt{2}$ non lo è.