

Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 6

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Convenzioni.

- Per un quantizzatore uniforme su $[-V, V]$ con $L = 2^b$ livelli:

$$\Delta = \frac{2V}{L}, \quad P_{e_q} \approx \frac{\Delta^2}{12}.$$

- Le potenze in decibel sono espresse come

$$P_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(P).$$

- Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione è

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10}\left(\frac{P_x}{P_{e_q}}\right).$$

- Per l'entropia di una sorgente discreta:

$$H = - \sum_i p_i \log_2 p_i.$$

Esercizio 1. PCM di un segnale vocale: quantizzazione, SNR e bit rate

Si consideri un segnale vocale analogico limitato in banda tra 300 Hz e 3400 Hz. Il segnale viene campionato e poi quantizzato uniformemente per essere trasmesso in forma numerica.

Si assuma che:

- la frequenza di campionamento sia

$$f_s = 8 \text{ kHz};$$

- le ampiezze dei campioni siano normalizzate nell'intervallo

$$[-1, 1];$$

- il quantizzatore uniforme abbia $L = 2^b$ livelli.

Su una certa finestra temporale si osservano i seguenti 8 campioni:

$$x[n] = \left(\frac{15}{16}, \frac{9}{16}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{16}, -\frac{11}{16}, -\frac{15}{16}, -\frac{7}{16}, \frac{1}{16} \right).$$

- Spiegare perché la scelta $f_s = 8 \text{ kHz}$ è compatibile con il teorema del campionamento.
- Esprimere il passo di quantizzazione Δ in funzione di L e di b .
- Usando

$$P_{e_q}^{(\text{th})} \approx \frac{\Delta^2}{12},$$

determinare il minimo numero di bit b tale che

$$10 \log_{10}(P_{e_q}^{(\text{th})}) \leq -20 \text{ dB}.$$

- Assumendo che i campioni del segnale siano uniformemente distribuiti in $[-V, V]$, con $V = 1$, calcolare la potenza teorica del segnale

$$P_x^{(\text{th})}.$$

e) Calcolare, per $b = 3$ e per $b = 8$,

$$P_{e_q}^{(\text{th})}, \quad \text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{th})} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x^{(\text{th})}}{P_{e_q}^{(\text{th})}} \right), \quad R_b = f_s b.$$

Commentare il risultato.

f) Per $b = 3$, quantizzare i campioni assegnati e calcolare:

$$P_x = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x^2[n], \quad P_e = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 (x_Q[n] - x[n])^2,$$

$$\text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{emp})} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_e} \right).$$

Confrontare i risultati empirici con quelli teorici.

Svolgimento.

a) La massima frequenza del segnale vocale è

$$f_{\text{max}} = 3400 \text{ Hz.}$$

Il teorema del campionamento richiede

$$f_s \geq 2f_{\text{max}} = 6800 \text{ Hz.}$$

Quindi

$$f_s = 8000 \text{ Hz}$$

è una scelta compatibile con la ricostruzione del segnale.

b) Poiché l'intervallo dinamico ha ampiezza 2,

$$\Delta = \frac{2}{L}.$$

Essendo

$$L = 2^b,$$

si ottiene

$$\Delta = \frac{2}{2^b} = 2^{1-b}.$$

c) Si impone

$$10 \log_{10} \left(\frac{\Delta^2}{12} \right) \leq -20.$$

Sostituendo $\Delta = 2^{1-b}$:

$$P_{e_q}^{(\text{th})} \approx \frac{1}{3 \cdot 2^{2b}}.$$

Quindi

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{3 \cdot 2^{2b}} \right) \leq -20.$$

Ossia

$$-10 \log_{10}(3) - 20b \log_{10}(2) \leq -20.$$

Numericamente:

$$-4.77 - 6.02b \leq -20,$$

da cui

$$b \geq 2.53.$$

Il minimo intero è quindi

$$\boxed{b = 3.}$$

d) Assumendo i campioni uniformemente distribuiti in $[-V, V]$,

$$P_x^{(\text{th})} = \mathbb{E}[X^2] = \frac{V^2}{3}.$$

Con $V = 1$:

$$\boxed{P_x^{(\text{th})} = \frac{1}{3}.}$$

e) Per $b = 3$:

$$L = 8, \quad \Delta = \frac{1}{4}, \quad P_{e_q}^{(\text{th})} = \frac{(1/4)^2}{12} = \frac{1}{192}.$$

Quindi

$$\text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{th})} = 10 \log_{10} \left(\frac{1/3}{1/192} \right) = 10 \log_{10}(64) \approx 18.06 \text{ dB},$$

$$R_b = 8000 \cdot 3 = 24 \text{ kbit/s}.$$

Per $b = 8$:

$$L = 256, \quad \Delta = \frac{1}{128}, \quad P_{e_q}^{(\text{th})} = \frac{(1/128)^2}{12} = \frac{1}{196608}.$$

Quindi

$$\text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{th})} = 10 \log_{10} \left(\frac{1/3}{1/196608} \right) = 10 \log_{10}(65536) \approx 48.16 \text{ dB},$$

$$R_b = 8000 \cdot 8 = 64 \text{ kbit/s}.$$

La differenza di SNR è

$$48.16 - 18.06 = 30.10 \text{ dB} \approx 5 \cdot 6.02 \text{ dB},$$

quindi ogni bit aggiunto migliora lo SNR di circa 6.02 dB, come previsto.

f) Per $b = 3$ i livelli di quantizzazione sono i punti medi:

$$\left(-\frac{7}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right).$$

I campioni quantizzati sono quindi

$$x_Q[n] = \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right).$$

La potenza del segnale originale vale

$$P_x = \frac{1}{8} \sum x^2[n].$$

Quindi

$$P_x = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{15}{16}\right)^2 + \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 + \left(-\frac{3}{16}\right)^2 + \left(-\frac{11}{16}\right)^2 + \left(-\frac{15}{16}\right)^2 + \left(-\frac{7}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 \right].$$

La somma dei quadrati è

$$\frac{225 + 81 + 9 + 9 + 121 + 225 + 49 + 1}{256} = \frac{720}{256} = \frac{45}{16}.$$

Pertanto

$$P_x = \frac{1}{8} \cdot \frac{45}{16} = \frac{45}{128}.$$

Dunque

$$\boxed{P_x = \frac{45}{128}}.$$

L'errore campione per campione è

$$e[n] = x_Q[n] - x[n]$$

cioè

$$e[n] = \left(-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right).$$

Quindi

$$P_e = \frac{1}{8} \sum e^2[n] = \frac{1}{8} \cdot 8 \left(\frac{1}{16} \right)^2 = \frac{1}{256}.$$

Dunque

$$\boxed{P_e = \frac{1}{256}}.$$

Il rapporto segnale-rumore empirico vale

$$\text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{emp})} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_e} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{45/128}{1/256} \right).$$

Si ha

$$\frac{45/128}{1/256} = 90,$$

quindi

$$\boxed{\text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{emp})} = 10 \log_{10}(90) \approx 19.54 \text{ dB}}.$$

Il confronto con il valore teorico per $b = 3$,

$$\text{SNR}_{\text{dB}}^{(\text{th})} \approx 18.06 \text{ dB},$$

mostra un accordo buono ma non perfetto: la formula teorica si basa su un modello statistico medio, mentre qui si lavora su un insieme finito di campioni specifici.

Osservazione. Il calcolo teorico di

$$P_x^{(\text{th})} = \frac{V^2}{3}$$

assume implicitamente una distribuzione uniforme dei campioni in $[-V, V]$. Per un segnale reale la distribuzione delle ampiezze è in generale non uniforme e questo modifica il valore assoluto dello SNR. Spesso, come riferimento, si usa una sinusoidale a fase casuale, caso in cui compare il noto offset di 1.76 dB nella formula classica dello SNR di quantizzazione.

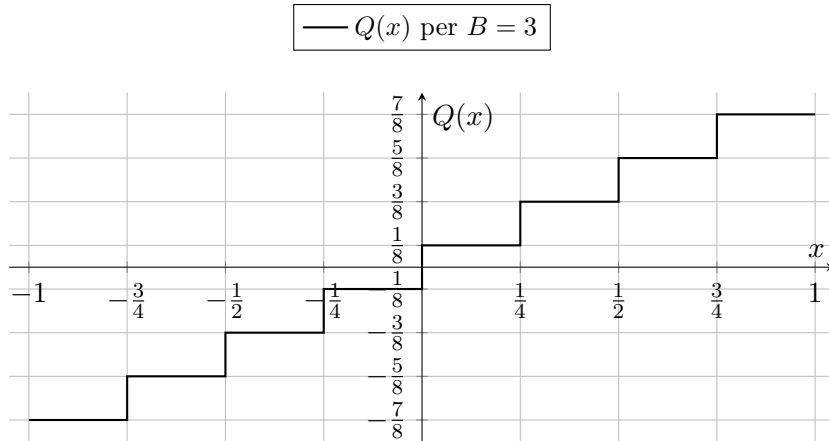


Figura 1: Caratteristica del quantizzatore uniforme a 8 livelli sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 2. Quantizzazione dei coefficienti nella base dei sinc

Si consideri il segnale

$$x(t) = \frac{3}{4} \operatorname{sinc}(t + 1) + \frac{1}{8} \operatorname{sinc}(t) - \frac{3}{4} \operatorname{sinc}(t - 1).$$

Si ricorda che le funzioni

$$\phi_k(t) = \operatorname{sinc}(t - k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale dello spazio dei segnali limitati in banda a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

a) Scrivere i coefficienti a_k della rappresentazione

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_k(t).$$

b) Determinare la dinamica dei coefficienti non nulli.

c) Quantizzare uniformemente tali coefficienti sulla loro dinamica usando $L = 3$ livelli. Determinare:

- il passo di quantizzazione Δ ,
- gli intervalli di decisione,
- i livelli di ricostruzione.

d) Calcolare i coefficienti quantizzati \hat{a}_k .

e) Scrivere il segnale ricostruito quantizzato

$$\hat{x}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}_k \operatorname{sinc}(t - k).$$

f) Calcolare l'errore quadratico totale

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt.$$

g) Commentare il significato geometrico del risultato.

Svolgimento.

a) Confrontando con la base $\phi_k(t) = \text{sinc}(t - k)$, si leggono subito i coefficienti:

$$a_{-1} = \frac{3}{4}, \quad a_0 = \frac{1}{8}, \quad a_1 = -\frac{3}{4},$$

e

$$a_k = 0 \quad \text{per } k \neq -1, 0, 1.$$

b) La dinamica dei coefficienti non nulli è

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

c) Con $L = 3$ livelli uniformi sulla dinamica $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$, il passo vale

$$\Delta = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4})}{3} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Gli intervalli di decisione sono

$$\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \quad \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

I corrispondenti livelli di ricostruzione (punti medi) sono

$$-\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}.$$

In particolare, lo zero viene quantizzato in zero.

d) Applicando il quantizzatore:

$$a_{-1} = \frac{3}{4} \mapsto \hat{a}_{-1} = \frac{1}{2},$$

$$a_0 = \frac{1}{8} \mapsto \hat{a}_0 = 0,$$

$$a_1 = -\frac{3}{4} \mapsto \hat{a}_1 = -\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\hat{a}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \hat{a}_0 = 0, \quad \hat{a}_1 = -\frac{1}{2}.$$

e) Il segnale ricostruito quantizzato è

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(t + 1) - \frac{1}{2} \text{sinc}(t - 1).$$

f) Poiché la base è ortonormale,

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k - \hat{a}_k|^2.$$

Gli errori sui coefficienti sono

$$a_{-1} - \hat{a}_{-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$a_0 - \hat{a}_0 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8},$$

$$a_1 - \hat{a}_1 = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Dunque

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} = \frac{9}{64}.$$

Quindi

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \frac{9}{64}.$$

g) Il significato geometrico è il seguente: quando un segnale è rappresentato su una base ortonormale, l'errore quadratico totale sul segnale continuo coincide con la somma dei quadrati degli errori sui coefficienti.

In altre parole, quantizzare i coefficienti della rappresentazione significa controllare direttamente l'energia dell'errore sul segnale originario.

Esercizio 3. Quantizzazione di una variabile triangolare con 8 livelli, entropia e codice di Huffman

Sia x una variabile aleatoria continua con densità triangolare

$$f_x(\alpha) = \text{tri}(\alpha)$$

Si quantizzi x mediante un quantizzatore uniforme a 8 livelli sull'intervallo $[-1, 1]$, assegnando a ciascun intervallo il suo punto medio.

- Determinare passo di quantizzazione, intervalli e livelli di uscita.
- Calcolare la probabilità di ciascun simbolo in uscita dal quantizzatore.
- Calcolare la potenza dell'errore di quantizzazione
- Calcolare l'entropia della sorgente quantizzata.
- Costruire un possibile codice di Huffman per i simboli quantizzati e calcolarne la lunghezza media.

Svolgimento.

- a) L'intervallo dinamico ha ampiezza 2, quindi il passo di quantizzazione è

$$\Delta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Gli intervalli sono

$$I_1 = \left[-1, -\frac{3}{4}\right), \quad I_2 = \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad I_3 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \quad I_4 = \left[-\frac{1}{4}, 0\right),$$

$$I_5 = \left[0, \frac{1}{4}\right), \quad I_6 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad I_7 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad I_8 = \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

I corrispondenti livelli (punti medi) sono

$$q_1 = -\frac{7}{8}, \quad q_2 = -\frac{5}{8}, \quad q_3 = -\frac{3}{8}, \quad q_4 = -\frac{1}{8},$$

$$q_5 = \frac{1}{8}, \quad q_6 = \frac{3}{8}, \quad q_7 = \frac{5}{8}, \quad q_8 = \frac{7}{8}.$$

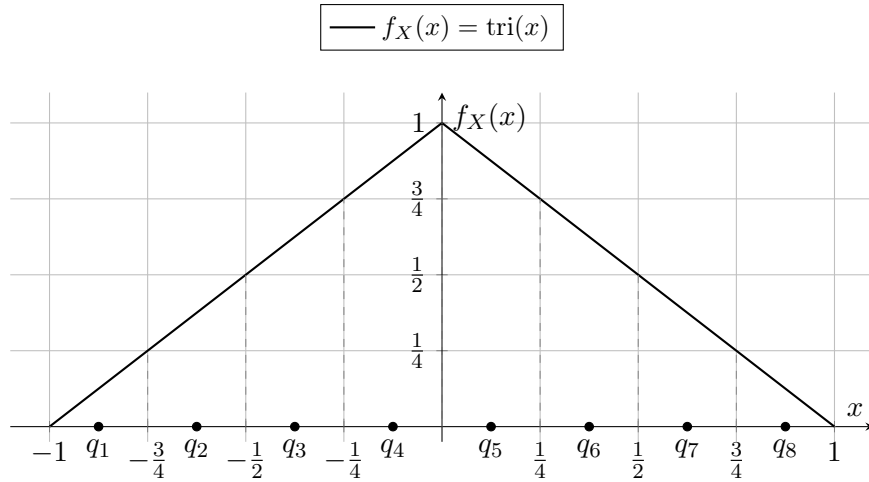


Figura 2: Pdf triangolare e suddivisione in 8 intervalli uniformi di quantizzazione. I punti q_i sono i livelli di ricostruzione.

- b) Le probabilità di uscita si ottengono integrando la densità sui vari intervalli. Per simmetria basta calcolare quelle positive:

$$p_5 = \int_0^{1/4} (1-x) dx = \frac{7}{32}, \quad p_6 = \int_{1/4}^{1/2} (1-x) dx = \frac{5}{32},$$

$$p_7 = \int_{1/2}^{3/4} (1-x) dx = \frac{3}{32}, \quad p_8 = \int_{3/4}^1 (1-x) dx = \frac{1}{32}.$$

Per simmetria

$$p_1 = p_8, \quad p_2 = p_7, \quad p_3 = p_6, \quad p_4 = p_5.$$

Quindi

$(p_1, \dots, p_8) = \left(\frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \frac{7}{32}, \frac{7}{32}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \frac{1}{32} \right).$

- c) Poiché il quantizzatore è uniforme, con livelli nei punti medi, e la densità triangolare è lineare su ciascun intervallo di quantizzazione, in questo caso si può usare direttamente

$$P_{e_q} = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Con

$$\Delta = \frac{1}{4},$$

si ottiene

$$P_{e_q} = \frac{(1/4)^2}{12} = \frac{1}{16 \cdot 12} = \frac{1}{192}.$$

Dunque

$P_{e_q} = \frac{1}{192}.$

- d) L'entropia della sorgente quantizzata è

$$H = - \sum_{i=1}^8 p_i \log_2 p_i.$$

Usando la simmetria:

$$H = -2 \left[\frac{7}{32} \log_2 \frac{7}{32} + \frac{5}{32} \log_2 \frac{5}{32} + \frac{3}{32} \log_2 \frac{3}{32} + \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} \right].$$

Numericamente:

$$H \approx 2.749 \text{ bit/simbolo.}$$

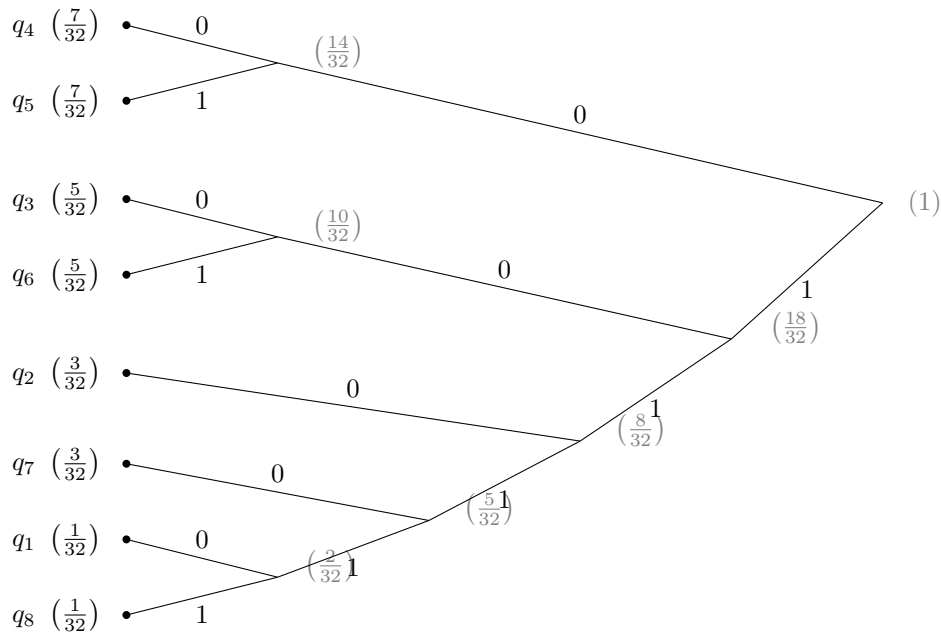


Figura 3: Una possibile costruzione dell'albero di Huffman per i simboli quantizzati della variabile triangolare.

e)

Simbolo	Livello	Probabilità	Codice
q_4	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{32}$	00
q_5	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{32}$	01
q_3	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{32}$	100
q_6	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{32}$	101
q_2	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{32}$	110
q_7	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{32}$	1110
q_1	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{32}$	11110
q_8	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{32}$	11111

La lunghezza media vale

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^8 p_i l_i$$

e quindi

$$\bar{L} = \frac{7}{32} \cdot 2 + \frac{7}{32} \cdot 2 + \frac{5}{32} \cdot 3 + \frac{5}{32} \cdot 3 + \frac{3}{32} \cdot 3 + \frac{3}{32} \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot 5 + \frac{1}{32} \cdot 5.$$

Si ottiene

$$\bar{L} = \frac{89}{32} \approx 2.781 \text{ bit/simbolo.}$$

Si verifica quindi la relazione

$$H \leq \bar{L} < H + 1.$$

Esercizio 4. Codifica di Huffman su blocchi di lunghezza 2

Una sorgente discreta senza memoria emette simboli dell'alfabeto

$$\mathcal{A} = \{A, B, C\}$$

con probabilità

$$p_A = \frac{1}{2}, \quad p_B = \frac{1}{3}, \quad p_C = \frac{1}{6}.$$

- a) Costruire un codice di Huffman per i simboli singoli e calcolarne la lunghezza media \bar{L}_1 .
b) Considerare ora la sorgente a blocchi di lunghezza 2, cioè i simboli

$$x_1x_2 \in \mathcal{A}^2.$$

Elencare tutti i 9 blocchi possibili e calcolarne la probabilità.

- c) Calcolare l'entropia della sorgente originaria

$$H = - \sum_{x \in \mathcal{A}} p_x \log_2 p_x$$

e l'entropia della sorgente a blocchi

$$H' = - \sum_{x_1x_2 \in \mathcal{A}^2} p_{x_1x_2} \log_2 p_{x_1x_2}$$

- d) Costruire un possibile codice di Huffman per i blocchi di lunghezza 2.
e) Calcolare la lunghezza media per blocco \bar{L}_2 e la corrispondente lunghezza media per simbolo elementare

$$\frac{\bar{L}_2}{2}.$$

- f) Confrontare \bar{L}_1 con $\bar{L}_2/2$ e commentare il risultato.

Svolgimento.

- a) Per i simboli singoli, un possibile codice di Huffman è

$$A \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 10, \quad C \rightarrow 11.$$

La lunghezza media vale

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

Quindi

$$\boxed{\bar{L}_1 = 1.5 \text{ bit/simbolo.}}$$

- b) Poiché la sorgente è i.i.d. (simboli indipendenti e identicamente distribuiti),

$$p_{x_1x_2} = p_{x_1} \cdot p_{x_2}$$

Quindi:

$$P_{AA} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}
P_{AB} &= P_{BA} = \frac{1}{6}, \\
P_{AC} &= P_{CA} = \frac{1}{12}, \\
P_{BB} &= \frac{1}{9}, \\
P_{BC} &= P_{CB} = \frac{1}{18}, \\
P_{CC} &= \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

c) L'entropia della sorgente elementare è

$$H = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \approx 1.459 \text{ bit/simbolo.}$$

Essendo la sorgente senza memoria,

$$H' = 2H \approx 2.918 \text{ bit/blocco.}$$

d) Un possibile codice di Huffman per i blocchi è:

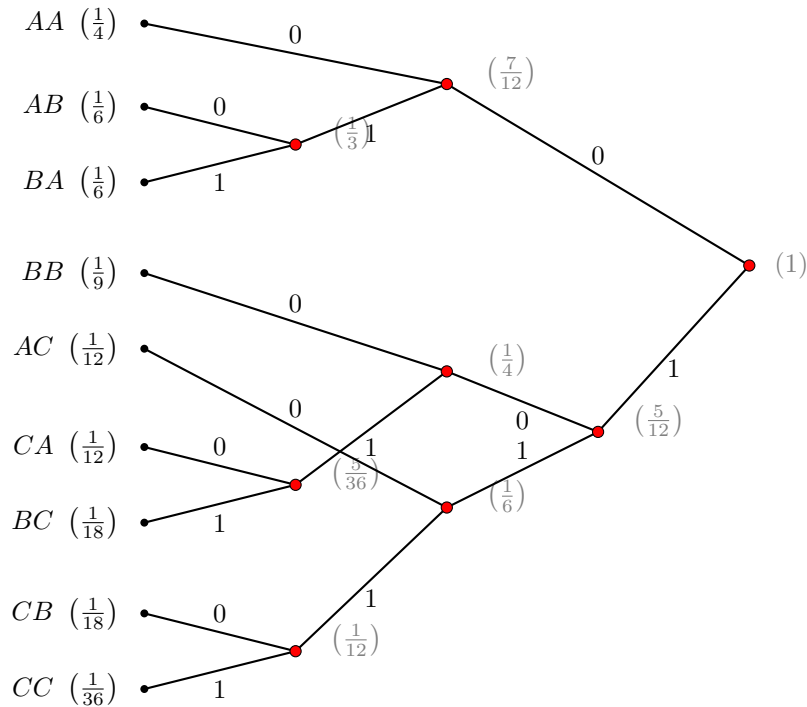


Figura 4: Una possibile costruzione corretta dell'albero di Huffman per i blocchi di lunghezza 2.

Blocco	Probabilità	Codice
AA	$\frac{1}{4}$	00
AB	$\frac{1}{6}$	010
BA	$\frac{1}{6}$	011
BB	$\frac{1}{9}$	100
AC	$\frac{1}{12}$	110
CA	$\frac{1}{12}$	1010
BC	$\frac{1}{18}$	1011
CB	$\frac{1}{18}$	1110
CC	$\frac{1}{36}$	1111

e) La lunghezza media per blocco vale

$$\bar{L}_2 = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{18} \cdot 4 + \frac{1}{18} \cdot 4 + \frac{1}{36} \cdot 4.$$

Si ottiene

$$\bar{L}_2 = \frac{107}{36} \approx 2.972 \text{ bit/blocco.}$$

Dunque

$$\frac{\bar{L}_2}{2} = \frac{107}{72} \approx 1.486 \text{ bit/simbolo.}$$

f) Si ha

$$\frac{\bar{L}_2}{2} \approx 1.486 < 1.5 = \bar{L}_1.$$

Quindi la codifica a blocchi di lunghezza 2 risulta leggermente migliore della codifica simbolo per simbolo. Questo mostra come il blocking possa avvicinare la lunghezza media per simbolo all'entropia della sorgente.

Esercizio 5. LZ77 con sovrapposizione: scelta del match più lungo

Si consideri la sequenza binaria

$$S = 01010101011101110111010.$$

Si applichi una versione di LZ77 con codifica a triplette

$$(d, \ell, c),$$

dove:

- $(0, 0, c)$ rappresenta un *literal*;
- (d, ℓ, c) significa: torna indietro di d simboli nella sequenza già ricostruita, copia da lì ℓ simboli e poi aggiungi il simbolo successivo c ;
- è ammesso anche il caso

$$\ell > d,$$

cioè la copia avviene con *sovrapposizione*: dopo aver copiato i primi d simboli, si continua a leggere anche i simboli che si stanno decodificando nel blocco corrente;

- a ogni passo si sceglie il *match più lungo*; in caso di parità si sceglie l'offset d più piccolo.

- Spiegare brevemente il significato della regola di sovrapposizione nel caso $\ell > d$.
- Applicare l'algoritmo alla sequenza assegnata e scrivere la lista completa di triplette ottenute.
- Mostrare esplicitamente come si ricostruiscono i simboli generati dalle due triplette non banali

$$(2, 8, 1) \quad \text{e} \quad (4, 11, 0).$$

- Dire quanti simboli vengono descritti complessivamente da ciascuna tripletta.
- Commentare perché, per una sequenza binaria come questa, una semplice codifica di Huffman sui simboli singoli non sarebbe particolarmente efficace, mentre LZ77 riesce comunque a comprimere bene.

Svolgimento.

- a) Se $\ell > d$, la copia non si ferma ai soli d simboli già presenti nella finestra passata: dopo aver copiato i primi d simboli, si continua a leggere anche quelli appena scritti. In questo modo una tripletta può descrivere una ripetizione più lunga del solo blocco iniziale.

Per esempio, se la sequenza già ricostruita termina con

01

e si usa la tripletta

$(2, 8, 1)$,

allora si copiano 8 simboli leggendo ciclicamente il blocco 01:

01010101,

e poi si aggiunge il simbolo finale 1.

- b) Applichiamo l'algoritmo in modo greedy.

I primi due simboli non hanno match utile precedente, quindi vengono emessi come literal:

$(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$.

A questo punto la sequenza già ricostruita è

01.

La parte successiva inizia con

01010101011...

e il match più lungo si ottiene proprio con offset $d = 2$, sfruttando la sovrapposizione:

$(2, 8, 1)$.

Dopo questa tripletta la sequenza ricostruita diventa

01010101011.

La parte rimanente inizia con

101110111010

e il match più lungo si ottiene con offset $d = 4$:

$(4, 11, 0)$.

Dunque la lista completa delle triplette è

$(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(2, 8, 1)$, $(4, 11, 0)$.

- c) Vediamo esplicitamente le due triplette non banali richieste.

La tripletta

$(2, 8, 1)$

parte dalla sequenza già ricostruita

01.

Tornando indietro di 2 simboli e copiando con sovrapposizione, si genera

01010101,

poi si aggiunge 1. Quindi il contributo complessivo è

$$010101011.$$

La tripletta

$$(4, 11, 0)$$

usa come blocco iniziale gli ultimi 4 simboli già ricostruiti:

$$1011.$$

Copiando 11 simboli con sovrapposizione si ottiene

$$10111011101,$$

e poi si aggiunge 0. Quindi il contributo complessivo è

$$101110111010.$$

d) Una tripletta $(0, 0, c)$ descrive 1 simbolo, mentre una tripletta (d, ℓ, c) descrive

$$\ell + 1$$

simboli.

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow 1, & (0, 0, 1) &\rightarrow 1, \\ (2, 8, 1) &\rightarrow 9, & (4, 11, 0) &\rightarrow 12. \end{aligned}$$

La somma vale

$$1 + 1 + 9 + 12 = 23,$$

cioè esattamente la lunghezza della sequenza iniziale.

e) In una sequenza binaria come questa i simboli 0 e 1 hanno frequenze comparabili, quindi una semplice Huffman sui simboli singoli porterebbe a un guadagno molto limitato, se non nullo.

LZ77, invece, non sfrutta tanto la diversa probabilità dei simboli elementari, quanto la presenza di *pattern ripetuti*. In questa sequenza compaiono ripetizioni lunghe di sottostringhe già viste, e la possibilità di usare triplette con $\ell > d$ permette di rappresentarle in modo molto compatto.

Confrontiamo ora con Huffman a blocchi.

Blocchi di lunghezza 1. Nella sequenza

$$S = 01010101011101110111010$$

si hanno

$$f(0) = 9, \quad f(1) = 14.$$

Con due soli simboli, qualunque codice di Huffman assegna una parola di lunghezza 1 a ciascuno dei due simboli. Quindi servono

$$\boxed{23 \text{ bit.}}$$

Blocchi di lunghezza 2. Suddividendo la sequenza in blocchi consecutivi di 2 simboli:

$$01 \mid 01 \mid 01 \mid 01 \mid 01 \mid 11 \mid 01 \mid 11 \mid 01 \mid 11 \mid 01$$

resta un simbolo finale

0.

I blocchi di lunghezza 2 sono quindi:

$$f(01) = 8, \quad f(11) = 3.$$

Anche qui i simboli distinti sono due, quindi Huffman assegna 1 bit per blocco. Servono dunque

11 bit

per gli 11 blocchi, più

1 bit

per il simbolo finale residuo. Quindi in totale:

12 bit.

Blocchi di lunghezza 3. Suddividendo la sequenza in blocchi consecutivi di 3 simboli:

010 | 101 | 010 | 111 | 011 | 101 | 110

restano due simboli finali:

10.

Le frequenze dei blocchi di lunghezza 3 sono:

$$f(010) = 2, \quad f(101) = 2, \quad f(111) = 1, \quad f(011) = 1, \quad f(110) = 1.$$

Un possibile codice di Huffman ha lunghezze

2, 2, 2, 3, 3,

per un totale di

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 16 \text{ bit}$$

per i 7 blocchi. I due simboli residui finali richiedono ancora

2 bit

con la codifica a blocchi di lunghezza 1. Quindi in totale:

18 bit.

In conclusione:

Codifica	Numero di bit
Huffman a blocchi di lunghezza 1	23
Huffman a blocchi di lunghezza 2	12
Huffman a blocchi di lunghezza 3	18

Per questa particolare sequenza, la codifica a blocchi di lunghezza 2 è la più efficiente tra le tre Huffman considerate.