Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 8

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Convenzioni.

- La funzione $Q(\cdot)$ è

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du.$$

Esercizio 1. Ricevitore ottimo e interferenza intersimbolica

Si consideri una trasmissione PAM binaria antipodale con simboli

$$a_k \in \{-1, +1\},$$

tempo di simbolo

$$T_s = 1,$$

e segnale trasmesso

$$x(t) = \sum_k a_k\, g(t - kT_s).$$

Il canale introduce rumore bianco gaussiano additivo con densità spettrale bilatera $N_0/2$, quindi il segnale ricevuto è

$$r(t) = x(t) + n(t).$$

Per un singolo simbolo trasmesso si ha

$$r(t) = a\, g(t) + n(t), \qquad a \in \{-1, +1\}.$$

Il ricevitore usa il filtro adattato

$$h(t) = g(-t),$$

e la decisione viene presa campionando l'uscita del filtro.

Si usi la mappa binaria

$$\texttt{0} \mapsto +1, \qquad \texttt{1} \mapsto -1.$$

a) Si consideri

$$g(t) = \mathrm{sinc}(t).$$

Calcolare il filtro adattato $h(t)$, l'impulso complessivo

$$f(t) = g(t) * h(t),$$

e la variabile decisionale per un singolo simbolo.

b) Per $g(t) = \mathrm{sinc}(t)$, calcolare la probabilità di errore quando

$$N_0 = 0.1.$$

Usare l'approssimazione

$$\log_{10} Q(\alpha) \simeq -0.22\alpha^2 - 1.04.$$

c) Sempre per $g(t) = \mathrm{sinc}(t)$, si consideri la sequenza binaria

$$\texttt{100111010}.$$

Scrivere il segnale PAM $x(t)$ e mostrare cosa si ottiene campionando l'uscita del filtro adattato in assenza di rumore. Commentare il risultato in termini di interferenza intersimbolica.

d) Ripetere l'analisi per

$$g(t) = \mathrm{rect}(t).$$

In particolare, determinare $f(t)$, la probabilità di errore per $N_0 = 0.1$, e rappresentare graficamente i passaggi

$$x(t), \qquad r(t) = x(t) + n(t), \qquad y(t) = r(t) * h(t).$$

e) Considerare infine

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Usando la stessa sequenza binaria, mostrare cosa succede ai campioni dell'uscita del filtro adattato e spiegare perché in questo caso compare interferenza intersimbolica.

Svolgimento.

a) Consideriamo

$$g(t) = \mathrm{sinc}(t).$$

Poiché $g(t)$ è reale e pari,

$$h(t) = g(-t) = \mathrm{sinc}(t).$$

L'impulso complessivo all'uscita del filtro adattato è

$$f(t) = g(t) * h(t) = \mathrm{sinc}(t) * \mathrm{sinc}(t).$$

Usando la coppia

$$\mathrm{sinc}(t) \;\leftrightarrow\; \mathrm{rect}(f),$$

si ottiene

$$F(f) = \mathrm{rect}^2(f) = \mathrm{rect}(f),$$

e quindi

$$\boxed{f(t) = \mathrm{sinc}(t).}$$

Inoltre l'energia dell'impulso elementare è

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(t) \, dt = 1.$$

Per un singolo simbolo, all'uscita del filtro adattato e nell'istante di decisione si ha, in generale,

$$y = aE_g + \eta, \qquad \eta \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2} E_g\right).$$

In questo caso $E_g = 1$, quindi

$$y = a + \eta, \qquad \eta \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right).$$

Se viene trasmesso $a = +1$, y è una variabile gaussiana centrata in $+1$; se viene trasmesso $a = -1$, y è centrata in -1. Essendo i due simboli equiprobabili e simmetrici, la soglia ottima è

$$\gamma = 0.$$

La regola di decisione è

$$y \geq 0 \Rightarrow \widehat{a} = +1, \qquad y < 0 \Rightarrow \widehat{a} = -1.$$

b) La probabilità di errore per il singolo simbolo vale, in generale,

$$P_e = Q\left(\frac{E_g}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_g}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right).$$

Poiché in questo caso $E_g = 1$,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right).$$

Con

$$N_0 = 0.1,$$

si ottiene

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{0.1}} = \sqrt{20}.$$

Quindi

$$P_e = Q(\sqrt{20}).$$

Usando

$$\log_{10} Q(\alpha) \simeq -0.22\alpha^2 - 1.04,$$

con $\alpha^2 = 20$, si ha

$$\log_{10} P_e \simeq -0.22 \cdot 20 - 1.04 = -5.44.$$

Pertanto

$$\boxed{P_e \simeq 10^{-5.44} \approx 3.6 \cdot 10^{-6}.}$$

c) La sequenza binaria

`100111010`

diventa, usando la mappa assegnata,

$$(a_0, a_1, \ldots, a_8) = (-1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, +1).$$

Per $g(t) = \mathrm{sinc}(t)$, il segnale PAM trasmesso è

$$x(t) = \sum_{k=0}^{8} a_k \,\mathrm{sinc}(t-k).$$

In assenza di rumore, dopo il filtro adattato:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{8} a_k f(t-k).$$

Poiché per il sinc abbiamo trovato

$$f(t) = \mathrm{sinc}(t),$$

allora

$$y(t) = \sum_{k=0}^{8} a_k \,\mathrm{sinc}(t-k).$$

Campionando negli istanti interi:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{8} a_k \,\mathrm{sinc}(n-k).$$

Ma

$$\mathrm{sinc}(n-k)=\begin{cases}1, & n=k,\\ 0, & n\neq k,\end{cases}$$

quindi

$$\boxed{y(n)=a_n.}$$

In altri termini, $f(t)=\mathrm{sinc}(t)$ soddisfa il criterio di Nyquist:

$$f(0)=1,\qquad f(k)=0,\quad k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0.$$

Di conseguenza, nei campioni decisionali non compare interferenza intersimbolica.

Nel dominio delle frequenze, indicando con $F(f)$ la trasformata di $f(t)$, il criterio corrisponde al fatto che le repliche spettrali sommino a una costante:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} F(f-m)=1.$$

Nel caso $f(t)=\mathrm{sinc}(t)$, si ha $F(f)=\mathrm{rect}(f)$, e le repliche della rect si affiancano senza buchi e senza sovrapposizioni.

d) Consideriamo ora

$$g(t)=\mathrm{rect}(t).$$

Anche in questo caso $g(t)$ è reale e pari, quindi

$$h(t)=g(-t)=\mathrm{rect}(t).$$

L'impulso complessivo è

$$\boxed{f(t)=\mathrm{rect}(t)*\mathrm{rect}(t)=\mathrm{tri}(t).}$$

Inoltre

$$E_g=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}^2(t)\,dt=1.$$

Quindi, per il singolo simbolo, la variabile decisionale è ancora

$$y=a+\eta,\qquad \eta\sim\mathcal{N}\left(0,\frac{N_0}{2}\right),$$

e la probabilità di errore è la stessa del caso precedente:

$$\boxed{P_e\simeq 3.6\cdot 10^{-6}.}$$

Per la sequenza

$$(a_0,a_1,\ldots,a_8)=(-1,+1,+1,-1,-1,-1,+1,-1,+1),$$

il segnale trasmesso è

$$x(t)=\sum_{k=0}^{8} a_k\,\mathrm{rect}(t-k).$$

Il segnale ricevuto è

$$r(t)=x(t)+n(t).$$

Nella figura seguente il rumore è rappresentato qualitativamente tramite una realizzazione pseudo-gaussiana.

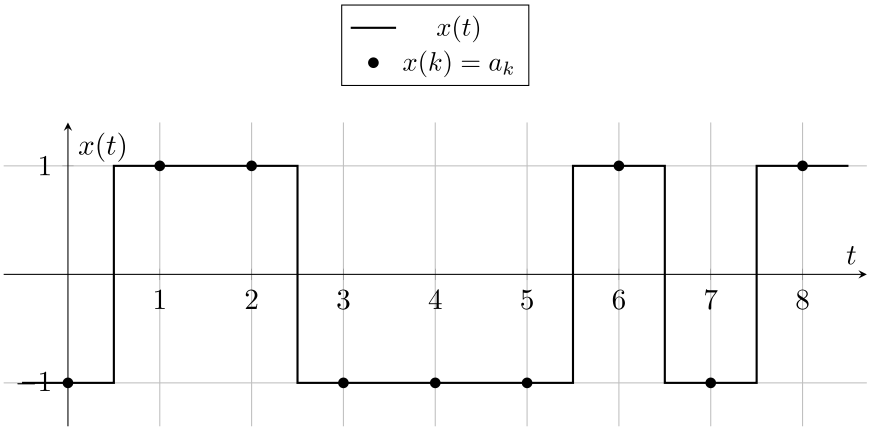


Figura 1: Segnale PAM trasmesso per $g(t) = \mathrm{rect}(t)$.

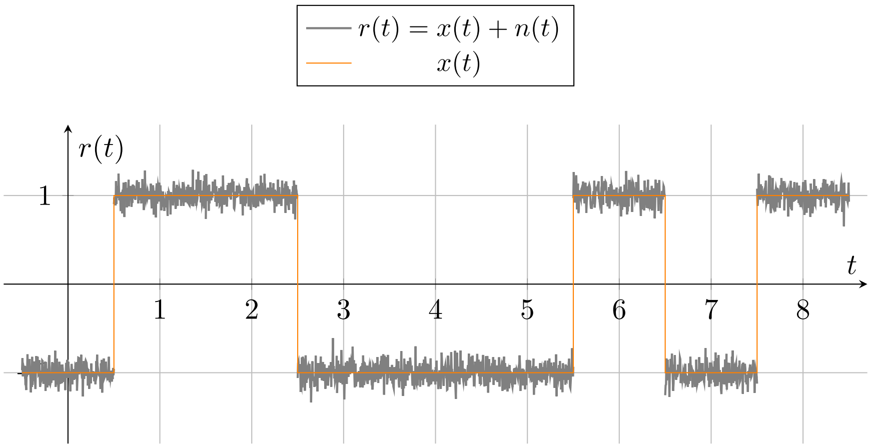


Figura 2: Segnale ricevuto prima del filtro adattato.

Dopo il filtro adattato:

$$y(t) = r(t) * h(t).$$

In assenza di rumore:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{8} a_k \,\mathrm{tri}(t-k).$$

Poiché

$$\mathrm{tri}(0) = 1, \qquad \mathrm{tri}(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,$$

anche $f(t) = \mathrm{tri}(t)$ soddisfa il criterio di Nyquist e quindi non produce ISI nei campioni decisionali.

In assenza di rumore si avrebbe

$$y(k) = a_k.$$

In presenza di rumore:

$$y_k = y(k) = a_k + \eta_k.$$

La regola di decisione, coerente con la mappa scelta, è

$$y_k \geq 0 \Rightarrow \widehat{b}_k = \mathtt{0}, \qquad y_k < 0 \Rightarrow \widehat{b}_k = \mathtt{1}.$$

Nella realizzazione mostrata i campioni restano tutti dal lato corretto della soglia, quindi si ricostruisce

$$\boxed{\widehat{\mathbf{b}} = \mathtt{100111010}.}$$

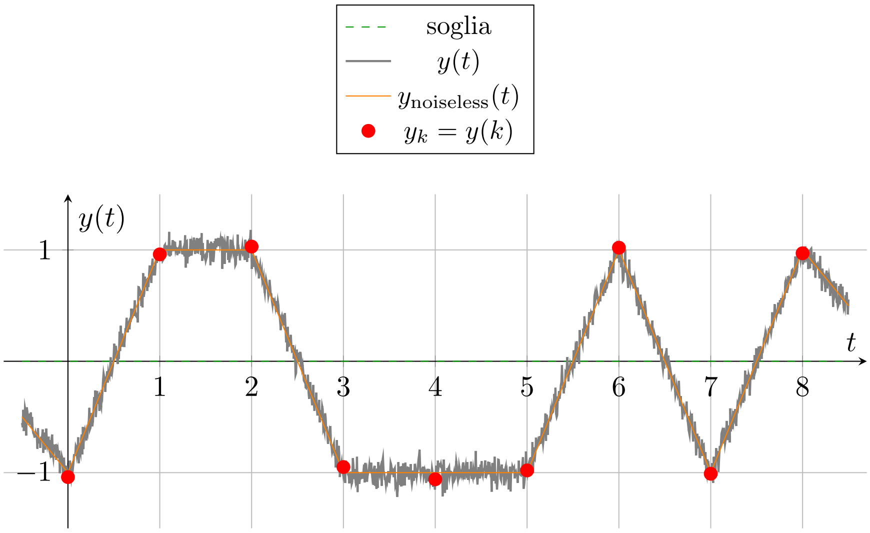


Figura 3: Uscita del filtro adattato. Il rumore filtrato è sommato lungo tutta la forma d'onda. I campioni decisionali $y_k = y(k)$ vengono confrontati con la soglia 0.

e) Infine, se

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right),$$

il filtro adattato è ancora

$$h(t) = g(-t) = g(t),$$

ma ora

$$f(t) = g(t) * g(t) = 2\,\text{tri}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Quindi

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = 1.$$

Per la sequenza PAM, in assenza di rumore,

$$y(k) = \sum_m a_m f(k-m).$$

Adesso il campione $y(k)$ non dipende solo da a_k, perché

$$f(k-m)$$

può essere diverso da zero anche per $m \neq k$.

Per gli indici interni, poiché $f(0) = 2$ e $f(\pm 1) = 1$, si ha

$$y(k) = 2a_k + a_{k-1} + a_{k+1}.$$

Per esempio, usando

$$(a_0, a_1, \ldots, a_8) = (-1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, +1),$$

si ottiene

$$y(6) = 2a_6 + a_5 + a_7 = 2 \cdot (+1) + (-1) + (-1) = 0.$$

Il campione cade esattamente sulla soglia, quindi la decisione diventa ambigua.

Questo è il fenomeno di interferenza intersimbolica: il simbolo corrente viene disturbato dai simboli vicini. In questo caso $f(t)$ non soddisfa il criterio di Nyquist, perché

$$f(1) \neq 0.$$

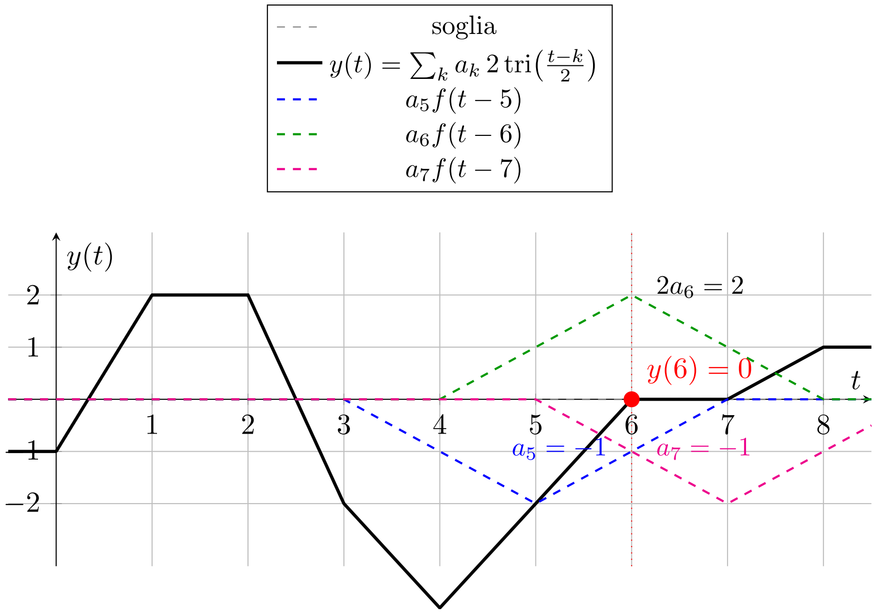


Figura 4: Caso $g(t) = \mathrm{rect}(t/2)$. L'impulso complessivo è $f(t) = 2\,\mathrm{tri}(t/2)$, quindi nel campione $t = 6$ contribuiscono anche i simboli vicini: $y(6) = 2a_6 + a_5 + a_7 = 2 - 1 - 1 = 0$. Il campione cade sulla soglia e la decisione è ambigua.

Esercizio 2. 4-PAM con codifica di Gray e generalizzazione M-PAM

Si consideri una trasmissione PAM multilivello su canale AWGN. Il segnale trasmesso è

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s),$$

e il segnale ricevuto è

$$r(t) = x(t) + n(t),$$

dove $n(t)$ è rumore bianco gaussiano additivo con densità spettrale bilatera $N_0/2$.

Il ricevitore usa il filtro adattato

$$h(t) = g(-t).$$

Si assuma assenza di interferenza intersimbolica, cioè che l'impulso complessivo

$$f(t) = g(t) * g(-t)$$

soddisfi il criterio di Nyquist:

$$f(kT_s) = 0, \qquad k \neq 0.$$

All'uscita del filtro adattato, al tempo di decisione, si ottiene

$$y_k = a_k E_g + \eta_k,$$

dove

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \, dt$$

e

$$\eta_k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2} E_g\right).$$

Si assuma ora:

$$T_s = 1\ \mu\text{s}, \qquad E_g = 1, \qquad N_0 = 0.1.$$

Si consideri una costellazione 4-PAM con livelli

$$a_k \in \{-3, -1, +1, +3\},$$

e codifica di Gray:

Livello	Bit
-3	00
-1	01
$+1$	11
$+3$	10

a) Disegnare la costellazione 4-PAM all'uscita del filtro adattato e indicare le soglie di decisione.

b) Calcolare la probabilità di errore condizionata alla trasmissione di ciascun livello.

c) Calcolare la probabilità media di errore di simbolo P_s.

d) Usando la codifica di Gray, calcolare una stima della probabilità di errore di bit P_b.

e) Calcolare l'energia media per simbolo E_s, l'energia media per bit E_b, il ritmo di simbolo R_s e il bit rate R_b.

f) Generalizzare il risultato a una costellazione M-PAM con

$$M = 2^b$$

livelli equiprobabili

$$\{-(M-1), -(M-3), \ldots, -1, +1, \ldots, M-3, M-1\}.$$

Calcolare E_s, E_b e scrivere una formula approssimata per P_b con codifica di Gray.

g) Applicare le formule al caso $M = 8$, mantenendo

$$E_g = 1, \qquad N_0 = 0.1, \qquad T_s = 1\ \mu\text{s}.$$

Svolgimento.

a) I livelli all'uscita del filtro adattato sono

$$-3E_g, \qquad -E_g, \qquad +E_g, \qquad +3E_g.$$

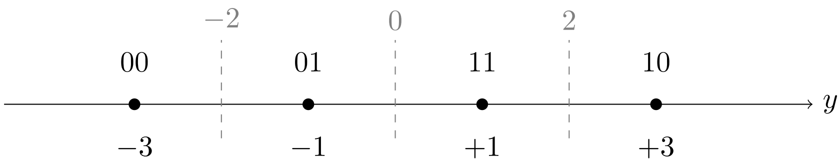
Poiché $E_g = 1$, diventano

$$-3, \qquad -1, \qquad +1, \qquad +3.$$

Le soglie ottime sono i punti medi tra livelli adiacenti:

$$-2, \qquad 0, \qquad +2.$$

Intervallo di decisione	$\widehat{a}_k$	Bit
$y_k < -2$	-3	00
$-2 \le y_k < 0$	-1	01
$0 \le y_k < 2$	$+1$	11
$y_k \ge 2$	$+3$	10



b) Il rumore in uscita dal filtro adattato ha varianza

$$\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2} E_g.$$

Con i dati del problema:

$$\sigma_\eta^2 = \frac{0.1}{2} \cdot 1 = 0.05.$$

La distanza tra ciascun livello e la soglia più vicina è

$$E_g = 1.$$

Quindi

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{0.05}} = \sqrt{20}.$$

Per i livelli esterni -3 e $+3$, l'errore può avvenire solo verso l'interno:

$$P(e \mid a_k = -3) = Q(\sqrt{20}), \qquad P(e \mid a_k = +3) = Q(\sqrt{20}).$$

Per i livelli interni -1 e $+1$, l'errore può avvenire in entrambe le direzioni:

$$P(e \mid a_k = -1) = 2Q(\sqrt{20}), \qquad P(e \mid a_k = +1) = 2Q(\sqrt{20}).$$

Usando

$$\log_{10} Q(\alpha) \simeq -0.22\alpha^2 - 1.04,$$

con $\alpha^2 = 20$, si ha

$$\log_{10} Q(\sqrt{20}) \simeq -0.22 \cdot 20 - 1.04 = -5.44.$$

Dunque

$$Q(\sqrt{20}) \simeq 10^{-5.44} \approx 3.6 \cdot 10^{-6}.$$

c) Supponendo i quattro livelli equiprobabili:

$$P_s = \frac{1}{4}\left[Q(\sqrt{20}) + 2Q(\sqrt{20}) + 2Q(\sqrt{20}) + Q(\sqrt{20})\right].$$

Quindi

$$P_s = \frac{3}{2} Q(\sqrt{20}).$$

Numericamente:

$$P_s \simeq \frac{3}{2} \cdot 3.6 \cdot 10^{-6} \simeq 5.4 \cdot 10^{-6}.$$

Quindi

$$\boxed{P_s \simeq 5.4 \cdot 10^{-6}.}$$

d) Con codifica di Gray, due livelli adiacenti differiscono per un solo bit. A SNR sufficientemente alto gli errori più probabili sono verso livelli adiacenti, quindi ogni errore di simbolo produce circa un errore di bit.

Ogni simbolo 4-PAM trasporta

$$\log_2 4 = 2$$

bit. Dunque

$$P_b \simeq \frac{P_s}{2}.$$

Perciò

$$P_b \simeq \frac{3}{4} Q(\sqrt{20}) \simeq \frac{3}{4} \cdot 3.6 \cdot 10^{-6}.$$

Quindi

$$\boxed{P_b \simeq 2.7 \cdot 10^{-6}.}$$

e) L'energia associata a un simbolo di ampiezza a_k è

$$E(a_k) = a_k^2 E_g.$$

Poiché $E_g = 1$, per il 4-PAM:

$$E_s = \frac{1}{4}[9 + 1 + 1 + 9] = 5.$$

Quindi

$$\boxed{E_s = 5.}$$

Ogni simbolo trasporta 2 bit, quindi

$$E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{5}{2}.$$

Dunque

$$\boxed{E_b = \frac{5}{2}.}$$

Il ritmo di simbolo vale

$$R_s = \frac{1}{T_s}.$$

Con

$$T_s = 1\ \mu\text{s},$$

si ottiene

$$R_s = 1\ \text{Msym/s}.$$

Il bit rate vale

$$R_b = 2R_s = 2\ \text{Mbit/s}.$$

Inoltre:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2.5}{0.1} = 25.$$

In dB:

$$10 \log_{10}(25) \approx 13.98\ \text{dB}.$$

f) Per una costellazione M-PAM con

$$M = 2^b,$$

ogni simbolo trasporta

$$b = \log_2 M$$

bit.

I livelli sono

$$-(M-1),\ -(M-3),\ \dots,\ -1,\ +1,\ \dots,\ M-3,\ M-1.$$

Per livelli equiprobabili:

$$E_s = E_g \cdot \frac{1}{M} \sum_{a \in \mathcal{A}_M} a^2.$$

Per la costellazione M-PAM simmetrica vale

$$\frac{1}{M} \sum_{a \in \mathcal{A}_M} a^2 = \frac{M^2-1}{3}.$$

Quindi

$$\boxed{E_s = \frac{M^2-1}{3} E_g.}$$

Poiché ogni simbolo porta $\log_2 M$ bit:

$$\boxed{E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{M^2-1}{3\log_2 M} E_g.}$$

La distanza tra un livello e la soglia più vicina è sempre E_g, quindi

$$\alpha = \frac{E_g}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_g}} = \sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}.$$

Per una costellazione M-PAM:

- i due livelli esterni hanno una sola soglia vicina;
- gli $M-2$ livelli interni hanno due soglie vicine.

Quindi la probabilità media di errore di simbolo è

$$P_s = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right).$$

Con codifica di Gray, approssimando ogni errore di simbolo come un errore di un solo bit:

$$\boxed{P_b \simeq \frac{2(M-1)}{M\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right).}$$

Si può anche esprimere tutto in funzione di E_b/N_0. Siccome

$$E_g = \frac{3\log_2 M}{M^2-1} E_b,$$

si ottiene

$$\boxed{P_b \simeq \frac{2(M-1)}{M\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right).}$$

g) Per $M = 8$:

$$b = \log_2 8 = 3.$$

I livelli sono

$$-7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7.$$

L'energia media per simbolo è

$$E_s = \frac{8^2 - 1}{3} E_g = \frac{63}{3} \cdot 1 = 21.$$

Quindi

$$\boxed{E_s = 21.}$$

L'energia media per bit è

$$E_b = \frac{E_s}{3} = 7.$$

Quindi

$$\boxed{E_b = 7.}$$

Il ritmo di simbolo resta

$$R_s = 1 \text{ Msym/s}.$$

Il bit rate diventa

$$R_b = 3R_s = 3 \text{ Mbit/s}.$$

La probabilità approssimata di errore di bit è

$$P_b \simeq \frac{2(8-1)}{8 \cdot 3} Q(\sqrt{20}) = \frac{14}{24} Q(\sqrt{20}).$$

Quindi

$$P_b \simeq \frac{14}{24} \cdot 3.6 \cdot 10^{-6} \simeq 2.1 \cdot 10^{-6}.$$

Infine:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{7}{0.1} = 70.$$

In dB:

$$10 \log_{10}(70) \approx 18.45 \text{ dB}.$$