Fondamenti di Telecomunicazioni – Esercitazione 9

Corso di Ingegneria Fisica e Matematica
A.A. 2025–2026

Esercizio 1. Scelta della modulazione M-PAM e requisito su E_b/N_0

Si vuole trasmettere un flusso binario a

$$R_b = 1.5 \text{ Mbit/s}$$

su un canale passa-basso AWGN con banda disponibile

$$B_c = 330 \text{ kHz}.$$

Si considera una trasmissione M-PAM con

$$M = 2^b,$$

dove ogni simbolo trasporta

$$b = \log_2 M$$

bit. Si assuma inizialmente impulso ideale di Nyquist, cioè roll-off nullo.

Per una trasmissione PAM senza interferenza intersimbolica, la banda minima richiesta è

$$B_{\min} = \frac{R_s}{2},$$

dove

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2 M}$$

è il ritmo di simbolo.

a) Verificare se le modulazioni 2-PAM, 4-PAM e 8-PAM sono compatibili con la banda disponibile.

b) Determinare la modulazione M-PAM minima che consente la trasmissione.

c) Per la modulazione scelta, calcolare:

$$R_s, \qquad T_s, \qquad B_{\min}.$$

d) Se si usa un filtro a coseno rialzato con roll-off α, la banda richiesta diventa

$$B = \frac{1+\alpha}{2} R_s.$$

Calcolare il massimo roll-off ammissibile.

e) Assumendo codifica di Gray, la probabilità di errore di bit per M-PAM può essere approssimata da

$$P_b \simeq \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}} \right).$$

Determinare il valore minimo di E_b/N_0 necessario per avere

$$P_b = 10^{-9}.$$

Usare l'approssimazione

$$\log_{10} Q(\beta) \simeq -0.22\beta^2 - 1.04.$$

Svolgimento.

a) Per M-PAM si ha
$$R_s = \frac{R_b}{\log_2 M}, \qquad B_{\min} = \frac{R_s}{2} = \frac{R_b}{2\log_2 M}.$$
Per 2-PAM:
$$B_{\min} = \frac{1.5 \cdot 10^6}{2\log_2 2} = 750 \text{ kHz}.$$
Quindi
$$750 \text{ kHz} > 330 \text{ kHz},$$
e la modulazione 2-PAM non è compatibile.

Per 4-PAM:
$$B_{\min} = \frac{1.5 \cdot 10^6}{2\log_2 4} = 375 \text{ kHz}.$$
Quindi
$$375 \text{ kHz} > 330 \text{ kHz},$$
e anche 4-PAM non è compatibile.

Per 8-PAM:
$$B_{\min} = \frac{1.5 \cdot 10^6}{2\log_2 8} = 250 \text{ kHz}.$$
Quindi
$$250 \text{ kHz} < 330 \text{ kHz},$$
e 8-PAM è compatibile.

Modulazione	$B_{\min}$	Compatibile?
2-PAM	750 kHz	No
4-PAM	375 kHz	No
8-PAM	250 kHz	Sì

b) La modulazione minima compatibile con la banda disponibile è quindi
$$\boxed{\text{8-PAM.}}$$

c) Per 8-PAM:
$$\log_2 8 = 3.$$
Quindi
$$R_s = \frac{R_b}{3} = \frac{1.5 \cdot 10^6}{3} = 500 \text{ ksym/s}.$$
Il tempo di simbolo è
$$T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{500 \cdot 10^3} = 2\ \mu\text{s}.$$
La banda minima è
$$B_{\min} = \frac{R_s}{2} = 250 \text{ kHz}.$$
Quindi
$$\boxed{R_s = 500 \text{ ksym/s}, \qquad T_s = 2\ \mu\text{s}, \qquad B_{\min} = 250 \text{ kHz}.}$$

d) Con roll-off α:

$$B = (1+\alpha)B_{\min}.$$

Vogliamo

$$(1+\alpha)250 \text{ kHz} \leq 330 \text{ kHz}.$$

Quindi

$$1+\alpha \leq \frac{330}{250} = 1.32.$$

Pertanto

$$\boxed{\alpha_{\max} = 0.32.}$$

È quindi possibile usare un roll-off fino al 32%.

e) Per 8-PAM si ha

$$M = 8, \qquad \log_2 M = 3.$$

La formula diventa

$$P_b \simeq \frac{2(8-1)}{8 \cdot 3} Q\left(\sqrt{\frac{6 \cdot 3}{8^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Quindi

$$P_b \simeq \frac{14}{24} Q\left(\sqrt{\frac{18}{63}\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Poniamo

$$\beta^2 = \frac{18}{63}\frac{E_b}{N_0}.$$

Imponiamo

$$10^{-9} \simeq \frac{14}{24}Q(\beta).$$

Quindi

$$Q(\beta) \simeq \frac{24}{14} \cdot 10^{-9} \simeq 1.71 \cdot 10^{-9}.$$

Passando ai logaritmi:

$$\log_{10} Q(\beta) \simeq \log_{10}(1.71 \cdot 10^{-9}) \simeq -8.77.$$

Usando

$$\log_{10} Q(\beta) \simeq -0.22\beta^2 - 1.04,$$

otteniamo

$$-8.77 \simeq -0.22\beta^2 - 1.04.$$

Quindi

$$0.22\beta^2 \simeq 7.73, \qquad \beta^2 \simeq 35.1, \qquad \beta \simeq 5.92.$$

Ora

$$\beta^2 = \frac{18}{63}\frac{E_b}{N_0}.$$

Pertanto

$$\frac{E_b}{N_0} = \beta^2 \frac{63}{18} \simeq 35.1 \cdot 3.5 \simeq 123.$$

In dB:

$$10\log_{10}(123) \simeq 20.9 \text{ dB}.$$

Quindi

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} \simeq 123 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} \simeq 20.9 \text{ dB}.}$$

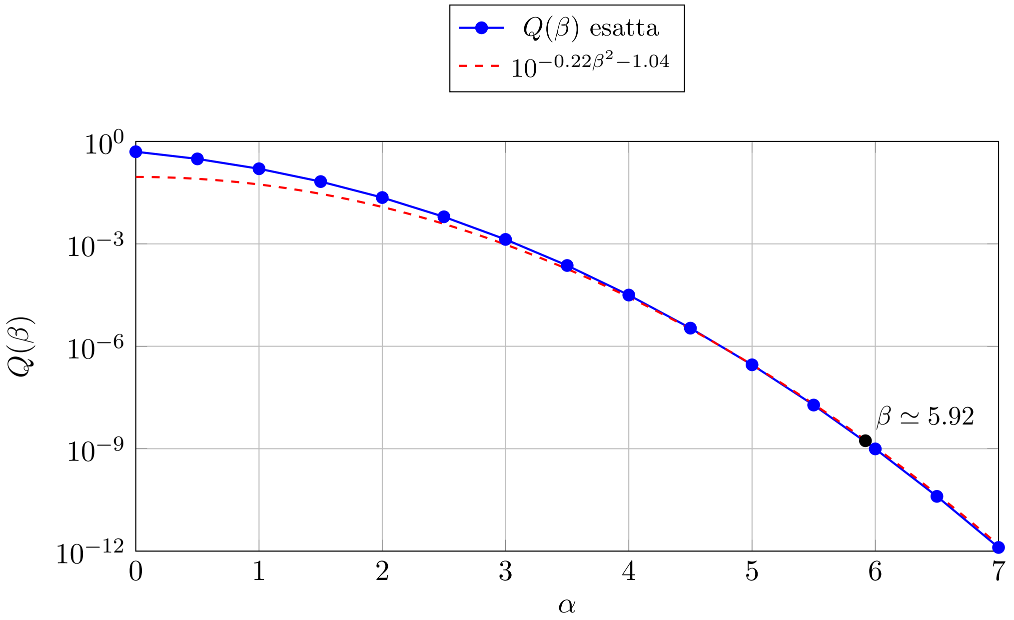

Figura 1: Confronto tra la funzione $Q(\beta)$ esatta e l'approssimazione $\log_{10} Q(\beta) \simeq -0.22\beta^2 - 1.04$.

Esercizio 2. Dalla codifica di sorgente alla modulazione 4-QAM

Si consideri una sorgente discreta senza memoria con alfabeto

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$$

e probabilità

$$p_A = \frac{1}{2}, \qquad p_B = p_C = p_D = p_E = \frac{1}{8}.$$

Si consideri la sequenza di simboli

`ACBBADEE`.

Dopo la codifica di sorgente, il flusso binario viene diviso in blocchi di 4 bit e ogni blocco viene codificato con un codice di Hamming $(7, 4)$ sistematico:

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \longmapsto (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3),$$

dove

$$p_1 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3, \qquad p_2 = u_2 \oplus u_3 \oplus u_4, \qquad p_3 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_4.$$

Infine, i bit codificati vengono modulati con una costellazione 4-QAM, usando la mappa

Bit	a_k	b_k
00	$+1$	$+1$
01	$+1$	-1
11	-1	-1
10	-1	$+1$

dove a_k è il coefficiente in fase e b_k quello in quadratura.

a) Costruire un codice di Huffman per la sorgente.

b) Codificare la sequenza `ACBBADEE` tramite il codice di Huffman ottenuto.

c) Dividere il flusso binario in blocchi di 4 bit e codificare ciascun blocco con il codice di Hamming $(7, 4)$.

d) Scrivere il flusso binario complessivo in uscita dal codificatore di Hamming.

e) Considerare i primi 8 bit in uscita dal codificatore di Hamming e calcolare i coefficienti (a_k, b_k) dei primi simboli 4-QAM.

Svolgimento.

a) Costruiamo il codice di Huffman usando le probabilità assegnate.

Le quattro probabilità più piccole sono uguali:

$$p_B = p_C = p_D = p_E = \frac{1}{8}.$$

Un possibile procedimento è:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

poi

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

e infine si fonde il nodo ottenuto con A, che ha probabilità 1/2.

Un possibile codice di Huffman è:

Simbolo	Probabilità	Codice
A	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{8}$	100
C	$\frac{1}{8}$	101
D	$\frac{1}{8}$	110
E	$\frac{1}{8}$	111

Naturalmente, scambiando i simboli B, C, D, E, oppure scambiando i bit 0 e 1 in qualche ramo, si ottiene un codice equivalente.

b) Usando il codice scelto:

$$A \mapsto 0, \qquad B \mapsto 100, \qquad C \mapsto 101, \qquad D \mapsto 110, \qquad E \mapsto 111.$$

La sequenza

`ACBBADEE`

viene codificata come

$$A\ C\ B\ B\ A\ D\ E\ E \mapsto 0\ 101\ 100\ 100\ 0\ 110\ 111\ 111.$$

Pertanto il flusso binario in uscita dalla codifica di Huffman è

$$\boxed{01011001000110111111.}$$

La lunghezza è pari a

$$1 + 3 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 = 20$$

bit, quindi è già multipla di 4.

c) Dividiamo il flusso binario in blocchi da 4 bit:

$$01011001000110111111 = 0101\ 1001\ 0001\ 1011\ 1111.$$

Per ogni blocco (u_1, u_2, u_3, u_4) calcoliamo

$$p_1 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3, \qquad p_2 = u_2 \oplus u_3 \oplus u_4, \qquad p_3 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_4.$$

Si ottiene:

Blocco informativo	(p_1, p_2, p_3)	Parola Hamming
0101	100	0101100
1001	110	1001110
0001	011	0001011
1011	000	1011000
1111	111	1111111

d) Concatenando le parole di Hamming:

$$0101100\ 1001110\ 0001011\ 1011000\ 1111111.$$

Quindi il flusso binario complessivo in uscita dal codificatore di Hamming è

$$\boxed{01011001001110000101110110001111111.}$$

Il flusso ha lunghezza

$$5 \cdot 7 = 35$$

bit.

e) I primi 8 bit in uscita dal codificatore di Hamming sono

$$01011001.$$

Li dividiamo in coppie:

$$01\ 01\ 10\ 01.$$

Usando la mappa 4-QAM assegnata:

Coppia di bit	a_k	b_k
01	$+1$	-1
01	$+1$	-1
10	-1	$+1$
01	$+1$	-1

Pertanto i primi quattro simboli 4-QAM sono

$$\boxed{(a_0, b_0) = (+1, -1), \quad (a_1, b_1) = (+1, -1), \quad (a_2, b_2) = (-1, +1), \quad (a_3, b_3) = (+1, -1).}$$

In forma complessa:

$$\boxed{1 - j, \qquad 1 - j, \qquad -1 + j, \qquad 1 - j.}$$