ESERCITAZIONE 8

ESERCIZIO 1

Trasmissione PAM antipodale con simboli

$$a_n \in \{-1, +1\}$$

$T_s = 1$ (tempo di simbolo)

Segnale trasmesso

$$x(t) = \sum_n a_n \underbrace{g(t - kT_s)}_{g(t)\ \text{impulso base}}$$

Il canale introduce rumore bianco gaussiano $n(t)$ con densità spettrale $N_0/2$ (costante).

$$r(t) = x(t) + n(t)$$

Per un singolo simbolo trasmesso abbiamo

$$r(t) = a\, g(t) + n(t) \qquad a \in \{-1, +1\}$$

Ricevitore filtro adattato $h(t) = g(-t)$ e la decisione viene presa all'uscita del filtro.

$$0 \to +1 \qquad 1 \to -1$$

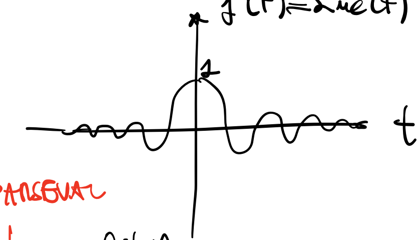
a) $g(t) = \mathrm{sinc}(t)$ ⇒ calcolare $f(t) = g(t) * h(t)$ e la variabile decisionale per ogni simbolo.

$g(t)$ è reale e pari $\Rightarrow$ $h(t) = g(-t) = \text{sinc}(-t)$

$= \text{sinc}(t)$

$$f(t) = \underbrace{g(t) * g(-t)}_{\text{auto correlazione di } g(t)} = \underbrace{\text{sinc}(t) * \text{sinc}(-t)}_{\downarrow \mathcal{F}} = \text{sinc}(t)$$

$$\text{rect}^2(f) = \text{rect}(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \text{sinc}(t)$$



energia di $g(t)$

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \, dt \overset{\text{PARSEVAL}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{rect}(f)|^2 \, df$$

$$= \boxed{1}$$

In generale si ha per ogni simbolo decisionale

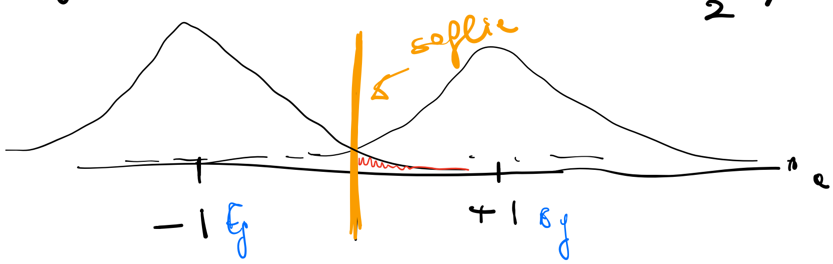
$$y = a \, E_g + n \qquad n \sim N\left(0, \frac{N_0 E_g}{2}\right)$$

E_g: energia dell'impulso base

$a \in \{-1, +1\}$

n: rumore filtrato che è ancora gaussiano

$$E_g = 1 \qquad y = a + n \qquad n \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$



Se viene trasmesso +1, y è VC gaussiana di media +1

Soglia ottima è $\gamma = 0$. Se $y \geq 0 \Rightarrow \hat{a} = +1$

$y < 0 \Rightarrow \hat{a} = -1$ ricostruiti

b) Per $p(t) = \mathrm{rect}(t)$ calcolare P. errore quando

$N_0 = \frac{1}{10}$. Usare l'approssimazione

$$\log_{10} Q(\alpha) \simeq -0.22\,\alpha^2 - 1.04$$

Prob errore singolo simbolo

$$P_e = Q\left(\frac{E_p}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_p}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right)$$

$E_p = 1$ e $N_0 = \frac{1}{10}$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2}{1/10}}\right) = Q\left(\sqrt{20}\right)$$

$$\log_{10} Q\left(\sqrt{20}\right) \simeq -0.22 \cdot 20 - 1.04 = -5.44$$

$$\Downarrow$$

$$P_e = 10^{-5.44} \simeq 3.6 \cdot 10^{-6}$$

c) Sempre con $g(t) = \text{sinc}(t)$ consideriamo la sequenza

$$\underbrace{1\,0\,0}\,\underbrace{1\,1\,1}\,\underbrace{0\,1\,0}$$ 9 simboli

Scrivere il segnale PAM $x(t)$ e mostrare cosa succede campionando l'uscita del filtro adattato in assenza di rumore (ISI).

$$(a_0, a_1, \dots, a_8) = (-1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, +1)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{8} a_k \underbrace{g}_{\text{sinc}(t)}(t - k\underbrace{T_s}_{=1}) = \sum_{n=0}^{8} a_n \,\text{sinc}(t-k)$$

In assenza di rumore

$$y(t) = x(t) * \underbrace{h(t)}_{g(-t)} = \left[\sum_{k=0}^{8} a_k \,\text{sinc}(t-k)\right] * \text{sinc}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{8} a_k \underbrace{\left[\text{sinc}(t-k) * \text{sinc}(t)\right]}_{f(t-k) \text{ autocorrelazione di } g(t)} = \sum_{k=0}^{8} a_k\, f(t-k)$$

$$g(t - nT_s) * g(-t) = f(t - nT_s)$$

$$= \sum_{k=0}^{8} a_k \,\text{sinc}(t-k)$$

$$y(nT_s) = y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{\text{sinc}(n-k)}_{= \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}} = \boxed{a_n}$$

$f(t)$ SODDISFA IL CRITERIO DI NYQUIST

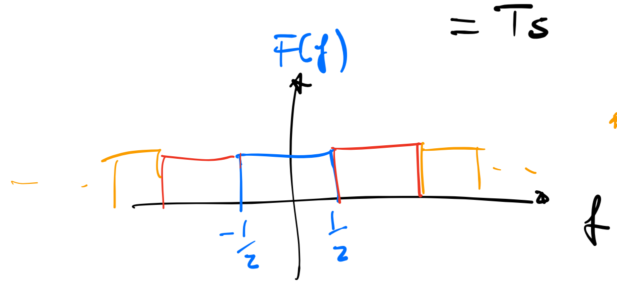
$$f(0)=1\neq 0 \quad e \quad f(n)=0 \quad \forall n\neq 0,\ n\in\mathbb{Z}$$

NO INTERFERENZA INTERSIMBOLICA (ISI NULLA)

repliche spettrali

$$T_s\, f(t)\cdot \delta_{T_s}(t) = T_s\,\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(f) * \delta_{\frac{1}{T_s}}(f)$$

$$= T_s$$



d) prendo $f(t)=\mathrm{rect}(t)$ $\Rightarrow$ $f(t)$ reale pari

$$h(t)=f(-t)=\mathrm{rect}(t)$$

$$f(t)=f(t)*h(t)=f(t)*f(-t)=\mathrm{rect}(t)*\mathrm{rect}(t)=\mathrm{tri}(t)$$

$$E_f=\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathrm{rect}(t)|^2\,dt=1$$

$$y=a\underbrace{E_f}_{=1}+n=a+n \qquad n\sim N\left(0,\frac{N_0}{2}\right)$$

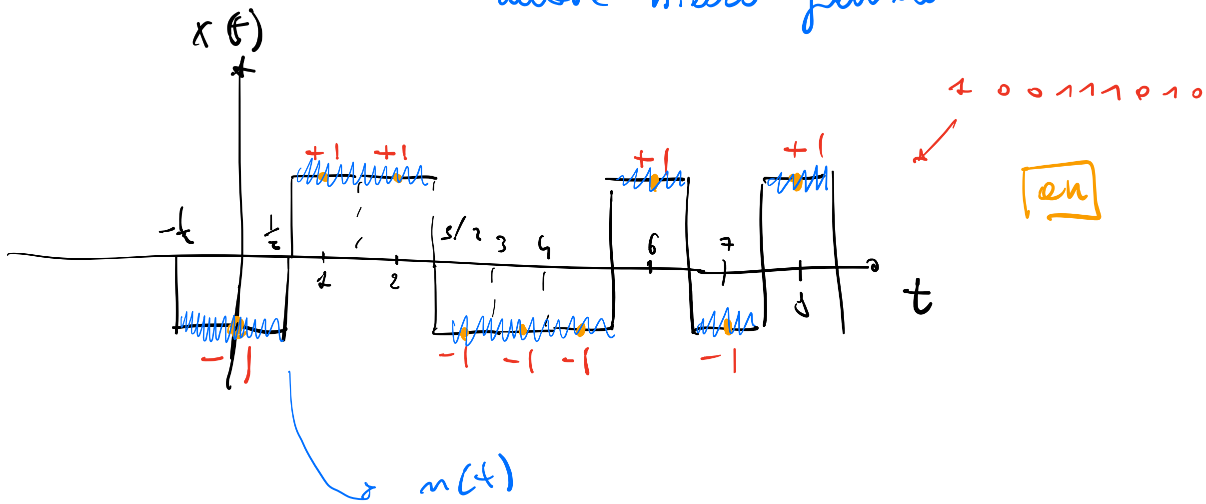
$P_e = 3.6\cdot 10^{-6}$ stima di prima

Data la sequenza di prima abbiamo

$$x(t)=\sum_{k=0}^{8} a_k\ \mathrm{rect}(t-k)$$

Segnale ricevuto

$$r(t) = x(t) + \underbrace{n(t)}_{\text{rumore bianco gaussiano}}$$



Dopo filtro adattato

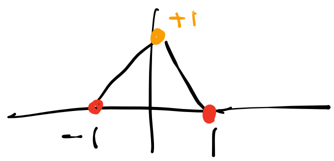
$$y(t) = r(t) * h(t)$$

In assenza di rumore

$$y(t) = \sum_{n=0}^{8} a_n \, tri(t-n)$$

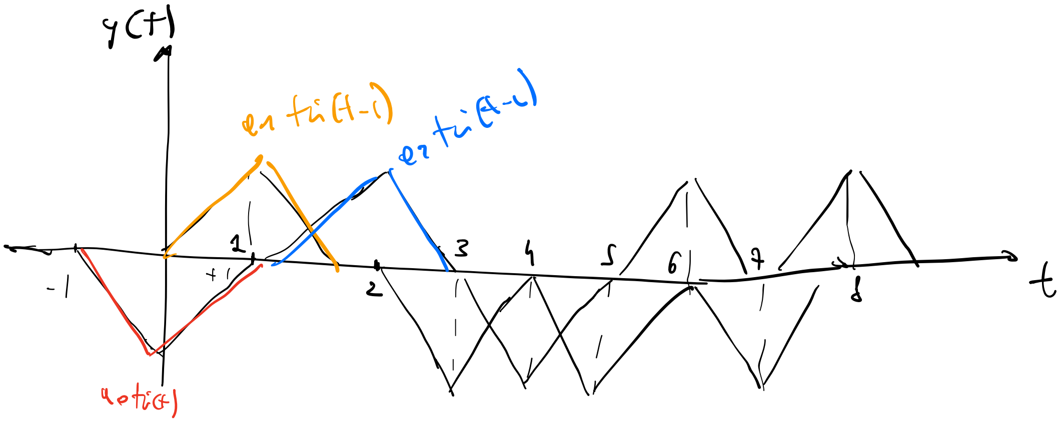
$tri(0) = 1$

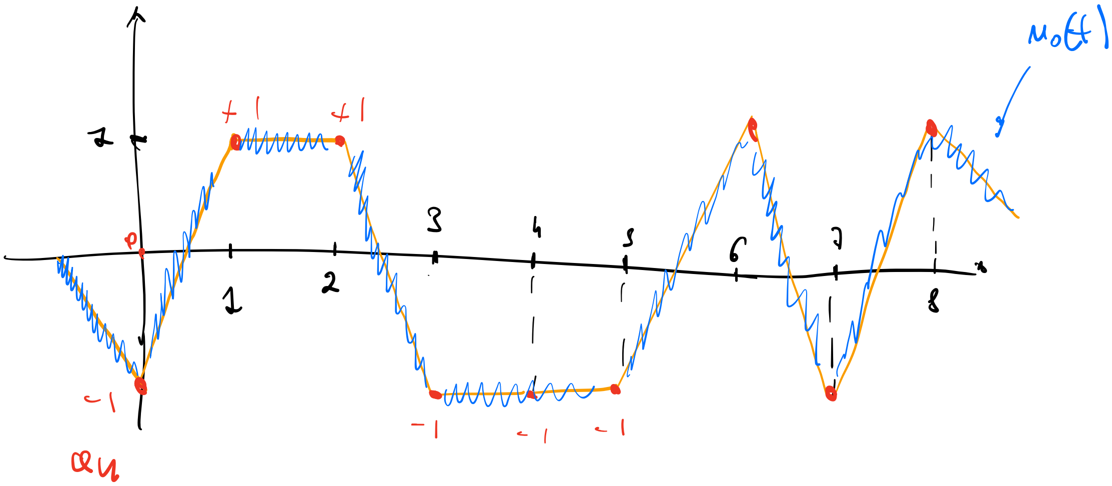
$tri(n) = 0 \quad n \neq 0, \; n \in \mathbb{Z}$



$tri(t)$ soddisfa Nyquist
quindi ISI nulla

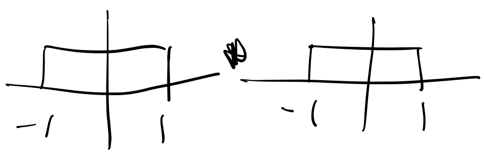
$$y(mT_s) = y(m) = \sum_{n=0}^{8} a_n \, tri(m-n) = \boxed{a_m}$$



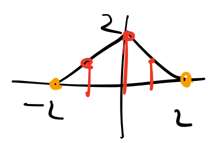


e) Definimos $g(t) = \mathrm{rect}(t/2)$, $T_s = 1$

$$f(t) = g(t) * g(t) = \mathrm{rect}(t/2) * \mathrm{rect}(t/2) = 2\,\mathrm{tri}(t/2)$$



$= 2\,\mathrm{tri}(t/2)$



$f(0) = 2 \neq 0 \qquad f(\pm 1) = 1 \neq 0$

Il segnale di rumore

$$y(t) = \sum_{n=0}^{8} a_n\, f(t-n) = 2 \sum_{n=0}^{8} a_n\, \mathrm{tri}\left(\frac{t-n}{2}\right)$$

Campioniamo in mTs

$$y(mTs) = y(m) = 2 \sum_{n=0}^{8} a_k\, \mathrm{tri}\left(\frac{m-n}{2}\right)$$

$$\mathrm{tri}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \frac{m-n}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{m=n} \\ \frac{1}{2} & m-n = \pm 1 \quad n = m \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= 2\left[a_m + \frac{1}{2} a_{m-1} + \frac{1}{2} a_{m+1}\right]$$

$$= \boxed{2a_m + a_{m-1} + a_{m+1}}$$

ISI non nulla

$$y(6) = 2a_6 + a_5 + a_7 = 2\cdot(+1) + (-1) + (-1) = \boxed{0}$$

nella soglia

Esercizio 2 4-PAM, Gray e M-PAM

Assumiamo $Ts = 1\mu s$, $E_g = 1$, $N_0 = \frac{1}{10}$

Prendiamo un PAM a 4-livelli $a_n \in \{-3, -1, +1, +3\}$ e codifica di Gray

Livello	Codice
−3	00
−1	01
+1	11
+3	10

gli adiacenti differiscono di esattamente 1 bit

e) Disegnare la costellazione 4-PAM e indicare le soglie di decisione

In uscita dal filtro adattato i livelli sono:

$$-3E_g \qquad -E_g \qquad E_g \qquad +3E_g$$

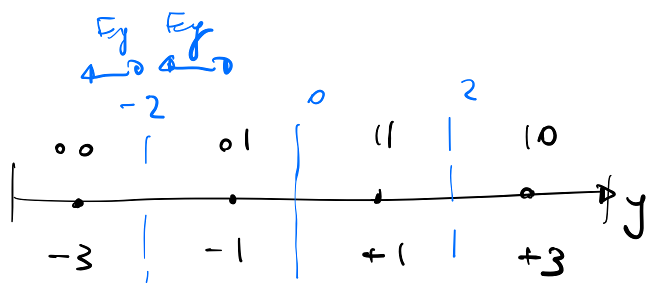
$E_g = 1$ ↓

$-3 \qquad -2 \qquad -1 \qquad 0 \qquad +1 \qquad +2 \qquad +3$

punti medi livelli adiacenti

3 soglie

Intervallo	$\hat{a}_n$	Bit
$y_n < -2$	-3	00
$-2 \le y_n < 0$	-1	01
$0 \le y_n < 2$	$+1$	11
$y_n \ge 2$	$+3$	10



b) $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} E_g = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{20}$

Per i livelli esterni -3 e $+3$ l'errore può avvenire solo verso l'interno

$$P_{e|a_n=\pm 3} = Q\left(\frac{E_g}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_g}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{20})$$

Per i livelli interni $+1$ e -1 l'errore può avvenire in entrambe le direzioni

$$P_{e|a_n=\pm 1} = 2Q(\sqrt{20})$$

c) Calcolare la probabilità media di errore di simbolo P_s.

$$P_s = \frac{1}{4}\left[\underbrace{Q(\sqrt{20}) + 2Q(\sqrt{20}) + 2Q(\sqrt{20}) + Q(\sqrt{20})}_{\underbrace{2\cdot 3}_{=6}\cdot Q(\sqrt{20})}\right]$$

\# simboli

$$= \boxed{\frac{3}{2}}\, Q(\sqrt{20}) = \frac{3}{2}\cdot 3.6\cdot 10^{-6} = \boxed{5,4\cdot 10^{-6}}$$

d) Con codifica di Gray calcolare P_b (probabilità di errore singolo bit) $\Rightarrow$ 2 simboli adiacenti differiscono di 1 solo bit
1 errore di simbolo $\simeq$ 1 errore di bit

$$P_b = \frac{1}{2} P_s = 2.7\cdot 10^{-6}$$

e) Calcolare l'energia media di simbolo E_s, di bit E_b e il ritmo di simbolo R_s e R_b.

$$E_{am} = a_m^2 E_g \quad \xRightarrow{E_g=1} \quad E_{\pm 3} = 9, \quad E_{\pm 1} = 1$$

energia associata al simbolo a_m

$$E_s = \frac{1}{4}\left[9+1+1+9\right] = \frac{20}{4} = \boxed{5}$$

$$E_b = \frac{E_s}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

#bit $\log_2 4$ #simboli

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{1\,\mu s} = 10^6 \text{ simboli/s} = 10 \text{ M simboli/s}$$

$$\boxed{R_b = 2 R_s = 20 \text{ Mbit/s}}$$

$$SNR = 10 \log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = 10 \log_{10}\left(\frac{5/2}{1/10}\right) = 10 \log_{10}(25) \approx 13.98 \text{ dB}$$

f) Generalizzazione al caso M-PAM con $M = 2^b$ #bit per simbolo

Livelli equiprobabili $\underbrace{\{-(M-1), -(M-3), \dots, -1, +1, \dots, M-3, M-1\}}_{M \text{ livelli}}$ a_n

$b = \log_2 M$ bit per simbolo

$$E_s = E_g \cdot \frac{1}{M} \underbrace{\sum_n a_n^2}_{\text{somma dei quadrati dei dispari}} = E_g \frac{1}{M} \cdot \boxed{\frac{M(M^2-1)}{6} \cdot 2}$$

per induzione

$$E_s = E_g \frac{M^2-1}{3}$$

$$E_b = \frac{E_s}{\#\text{bits per simbolo}} = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{M^2-1}{3 \log_2 M} E_g$$

La distanza tra un livello e la soglia è sempre E_g.

- le primo e ultimo una sola soglia
- gli altri 2

p. medi e di simbolo

$$P_s = \frac{1}{M} \cdot 2(M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

Con $\underline{\text{GRAY}}$ e $\underset{=2^b}{M}$ simboli

Ogni simbolo differisce da quelli adiacenti di esattamente un bit

$$\boxed{P_b = \frac{P_s}{\log_2 M}}$$

Esprimo in E_b/N_0

$$P_b = \frac{P_s}{\log_2 M} = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

$$= \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

g) Per $M=8$ $\quad b = \log_2 8 = 3$

Livelli: $\underbrace{-7 \; -5 \; -3 \; -1}$ $\underbrace{+1 \; +3 \; +5 \; +7}$

$$E_s = \frac{M^2-1}{3} E_g = \frac{8^2-1}{3} \cdot 1 = \frac{63}{3} = \boxed{21}$$

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{21}{3} = \boxed{7}$$

$$R_s = \frac{1}{T_S} = 1 \text{ M simb}/s$$

$$R_b = \log_2 M \, R_s = 3 R_s = 3 \text{ M bit}/s$$

$E_b/N_0 = 70$

$10 \log_{10}(70)$

$\approx \boxed{18.45 \text{ dB}}$

$$P_s = \frac{1}{8} \cdot 2(8-1) \cdot Q(\sqrt{20})$$

$$= \frac{14}{8} Q(\sqrt{20})$$

$$P_b = \frac{1}{3} P_s = \frac{14}{24} Q(\sqrt{20})$$

$\sim 2.1 \cdot 10^{-6}$